

CAPÍTULO 2

Relaciones inversas y cuadráticas

Matemáticas en la vida diaria



No se compliquen Las relaciones cuadráticas y las inversas se aplican frecuentemente en física. A fines del siglo XVI, el gran astrónomo y físico italiano Galileo Galilei, elaboró la hipótesis de que dos cuerpos que se dejan caer desde una misma altura, al mismo tiempo, llegarán al suelo al mismo tiempo sean cual sean de sus respectivas masas. De acuerdo con la leyenda, Galileo comprobó su teoría dejando caer dos balas de cañón, una grande y otra pequeña, desde lo alto de la Torre de Pisa. Ambas chocaron con el suelo casi al mismo tiempo. Su trabajo permitió obtener la ecuación $d = 16t^2$ que representa la distancia en pies que un objeto ha recorrido, t segundos después de iniciar su caída.

Piensa al respecto ¿Puedes imaginar una situación en la cual sería importante que alguien conociera la relación descrita anteriormente?



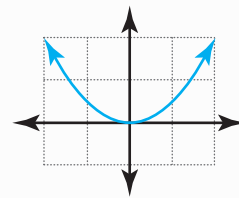
Carta a la familia

Estimados alumno(a) y familiares:

El siguiente capítulo que vamos a estudiar está relacionado con dos componentes fundamentales del álgebra: las *relaciones cuadráticas* y las *relaciones inversas*.

Iniciaremos el estudio de las relaciones cuadráticas, analizando y graficando ecuaciones de la forma $y = ax^2$, donde a es una constante. Por ejemplo, la fórmula para calcular el área de un círculo es $A = \pi r^2$. La constante es π y su valor es aproximadamente 3.14. La distancia que un cuerpo recorre durante su caída se representa con la relación cuadrática: $d = 4.9t^2$, donde d representa la distancia en metros y t representa el tiempo en segundos. En este caso la constante es 4.9.

La gráfica de una relación cuadrática es simétrica, tiene forma de U y se conoce como *parábola*. En relaciones cuadráticas más complejas, como el movimiento de cuerpos disparados o lanzados al aire, la ecuación adquiere la siguiente forma: $y = ax^2 + bx + c$.



También estudiaremos las relaciones inversas. En estas relaciones, el producto de dos cantidades es siempre igual a una misma cantidad. Por ejemplo, supón que alguien tiene sólo \$20 para pagarle a una niñera. El número de horas de servicio que va a recibir, dependerá de lo que la persona que necesita la niñera ofrezca pagar por hora. Si paga \$2 por hora obtendrá 10 horas de servicio, pero si paga \$8 por hora, entonces sólo recibirá 2.5 horas de servicio.

Finalizaremos el capítulo haciendo conjeturas y comprobándolas. Una *conjetura* es una suposición fundamentada que no ha sido demostrada. Hacer conjeturas y comprobarlas es una destreza muy importante que su hijo(a) podrá aplicar en matemáticas y en muchas otras situaciones a lo largo de su vida.

Vocabulario Aprenderemos varios nuevos términos en este capítulo:

conjetura
ecuación cúbica
hipérbola
inversamente proporcional

variación inversa
parábola
ecuación cuadrática

expresión cuadrática
relación recíproca
vértice

¿Qué pueden hacer en el hogar?

Estimulen a su hijo(a) para que busque relaciones inversas, como la descrita anteriormente, en su vida cotidiana. Usen estas relaciones para resolver problemas importantes en la vida de su hijo(a).



2.1

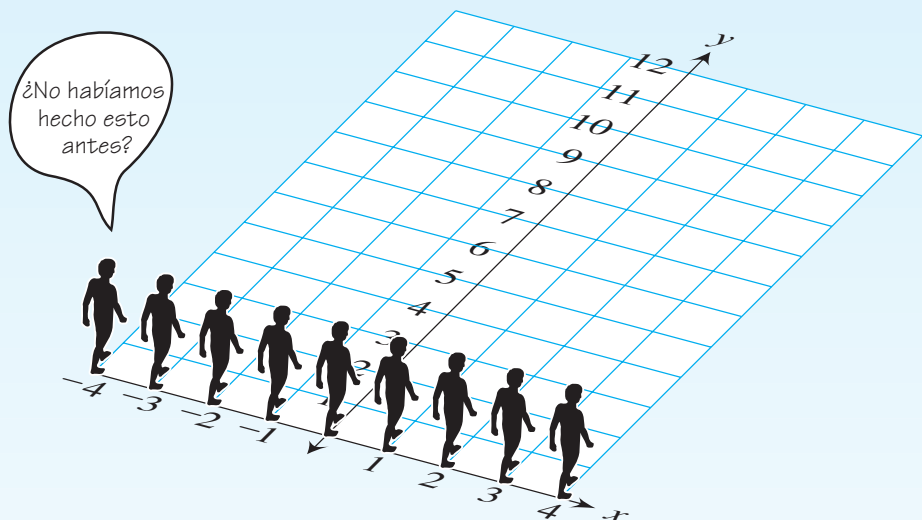
Relaciones cuadráticas

La ecuación de la relación entre el radio de un círculo, r , y el área A , es $A = \pi r^2$. La ecuación de la relación entre el tiempo en segundos en que un cuerpo cae, t , y la distancia en metros de la que cae, d , es $d = 4.9t^2$. En este capítulo, vas a explorar tales ecuaciones.

Explora

Elige un equipo de nueve alumnos para hacer una “gráfica humana”. El equipo debe seguir estas reglas:

- Alinearse a lo largo del eje x . Un alumno debe pararse en el -4 , otro en el -3 , y así sucesivamente, hasta el 4 .
- Multiplica por sí mismo el número en que estés parado. Es decir, si tu número es x , calcula x^2 . Ten presente el resultado.
- Cuando tu maestro(a) diga “¡Avanza!” camina hacia adelante o hacia atrás el número de pasos que tu resultado haya dado, desde el punto en que estabas.
- El número en que estabas es el valor de tu x ; y el número de pasos que diste es el valor de tu y .



Luego, cada uno de los nueve alumnos en la gráfica debe informar sus coordenadas. Registra la información en una tabla de la clase como la siguiente.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y									

Haz una gráfica de la clase y grafica los puntos en la pizarra o en una hoja de papel grande. Conecta los puntos con una curva suave.

Describe la gráfica.

Cuando hiciste la gráfica humana, ¿caminó hacia atrás algún alumno? Explica tu respuesta.

Si alguno hubiera empezado en 1.5 en el eje x , ¿a qué distancia hacia adelante o atrás se habría movido esa persona? ¿Qué pasaría si alguien hubiera empezado en -1.5 ?

¿Podría extenderse esta gráfica a la izquierda de -4 ó a la derecha de 4 ? Explica.

¿Es *simétrica* esta gráfica? Es decir, ¿hay una línea a lo largo en la cual podrías doblar la gráfica de manera que las dos mitades concuerden exactamente? De ser así, describe este *eje de simetría*, e indica si algún alumno está parado en él.

¿Qué ecuación describe la relación que se muestra en la gráfica?

Investigación

1

Ecuaciones cuadráticas y gráficas

La gráfica humana que hizo tu clase era la gráfica de $y = x^2$, que es una *ecuación cuadrática*. La ecuación cuadrática más reducida puede escribirse en la forma $y = ax^2$. Esta forma consta de una constante, representada por la letra a , multiplicada por el cuadrado de una variable.

La fórmula para el área de un círculo, $A = \pi r^2$, tiene esta forma. En la fórmula del área, la constante es π . En la ecuación que da la distancia en metros de un cuerpo que cae después de t segundos, $d = 4.9t^2$, la constante es 4.9. En la ecuación $y = x^2$, la constante es 1.

VOCABULARIO

parábola

La gráfica de cada una de estas relaciones es una curva simétrica con forma de U llamada **parábola**. En esta investigación, verás gráficas, tablas y ecuaciones para más relaciones cuadráticas.



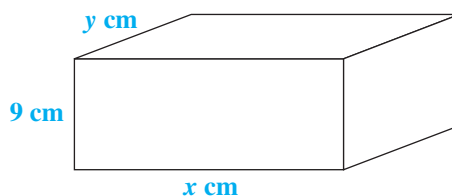


Recuerda

El volumen de un prisma rectangular es el producto de su largo por su ancho por su altura. El volumen se mide en unidades cúbicas, como cm^3 .

Serie de problemas A

Esta caja tiene una altura de 9 cm y una longitud que es del doble de su ancho.



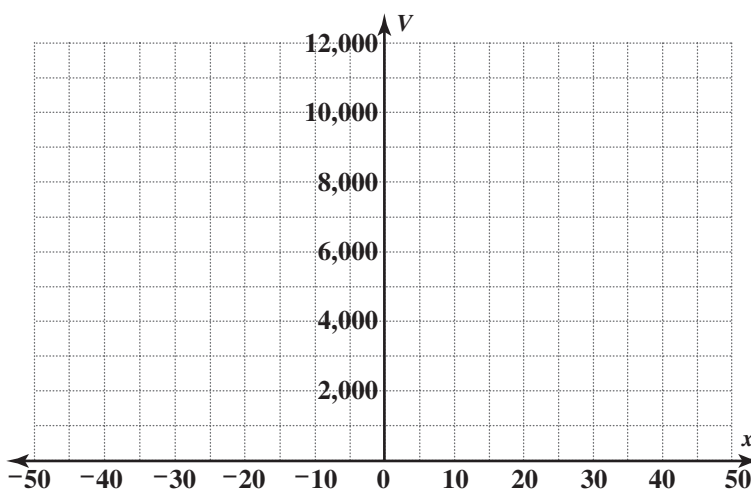
1. Puedes describir el volumen de la caja con cualquiera de estas ecuaciones cuadráticas.

$$V = 4.5x^2$$

$$V = 18y^2$$

¿Cómo pueden describir el mismo volumen dos ecuaciones distintas?

2. En una cuadrícula como la siguiente, grafica la ecuación $V = 4.5x^2$. Primero grafica los puntos (x, V) para los valores de x de 0 a 50. (Verás valores de x menores a 0 más adelante.) Grafica tantos puntos como necesites, hasta que te sientas seguro de la forma de la gráfica. Después, dibuja una curva suave a través de los puntos.



Datos de interés
La trayectoria de cualquier proyectil: una pelota de golf lanzada al aire, un libro de texto arrojado a un sofá, una bengala disparada desde un bote, sigue la forma de una parábola.





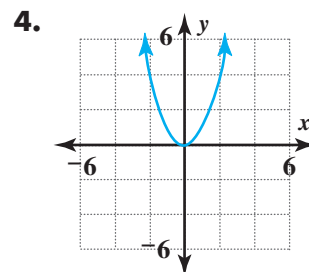
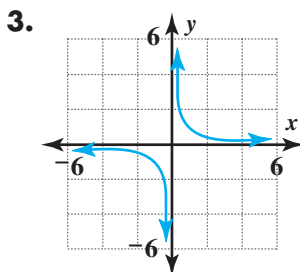
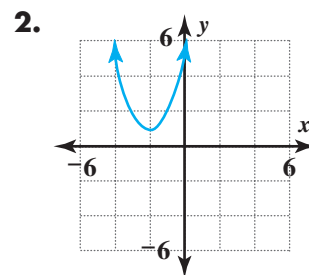
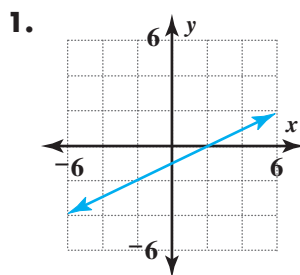
Recuerda

Para conjeturar, verificar y mejorar, haz una suposición razonable del valor, calcula el valor de otra variable con tu suposición y usa la respuesta para mejorar tu suposición.

3. Supón que deseas construir una caja con un volumen determinado y cuya longitud es el doble de su ancho. Puedes usar tu gráfica para calcular las longitudes viables de la caja.
 - a. Elige un valor para el volumen, V . (No uses uno de los valores que graficaste en el Problema 2.) Usa tu gráfica para calcular la longitud x que corresponde a este volumen.
 - b. Verifica tu estimado reemplazándolo por x en la ecuación $V = 4.5x^2$. ¿Está cerca este resultado del que elegiste en la Parte a?
4. Por supuesto que las cajas no tienen longitudes negativas, pero si piensas simplemente en $V = 4.5x^2$ como una regla para generar pares ordenados, puedes buscar en la gráfica valores para x menores que o iguales a 0. Grafica algunos puntos (x, V) para $x = 0$ y varios valores negativos de x . Usa los puntos para extender tu curva al segundo cuadrante.
5. ¿Cuál es el eje de simetría de tu gráfica?
6. Localiza ambos puntos en la gráfica donde $V = 9,000$.
 - a. Usa la gráfica para estimar los valores correspondientes de x .
 - b. Usa una calculadora para conjeturar, verificar y mejorar una estimación más acertada de los valores de x para $V = 9,000$.

Comparte & resume

Indica si cada gráfica podría representar una relación cuadrática. Explica cómo lo determinaste.



Investigación 2 Patrones cuadráticos

En tu análisis de ecuaciones lineales, las viste escritas de muchas formas, como $y = mx + b$ y $Ay + Bx = C$. Las ecuaciones cuadráticas también pueden escribirse de distintas formas.

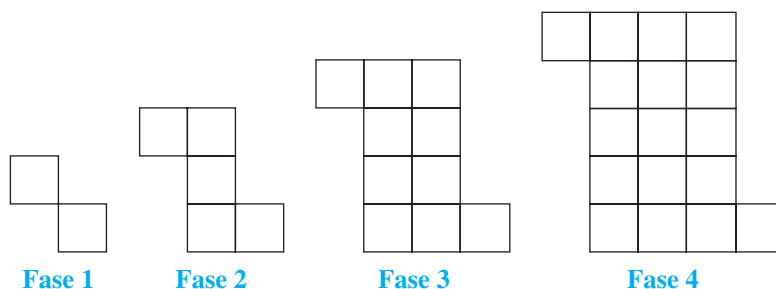
En esta investigación, vas a explorar algunos patrones geométricos que pueden representarse con ecuaciones cuadráticas además de $y = ax^2$.

MATERIALES

- tarjetas cuadradas (opcional)
- papel cuadriculado

Serie de problemas B

Considera este patrón de tarjetas cuadradas.

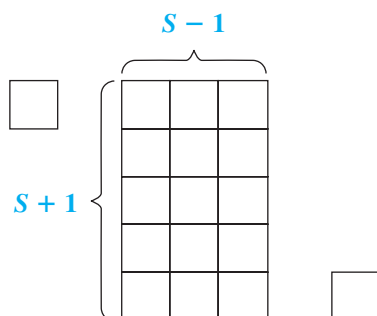


1. Describe el patrón en palabras.
2. Copia y completa la tabla para mostrar el número de tarjetas que se usaron en cada una de las cuatro primeras fases.

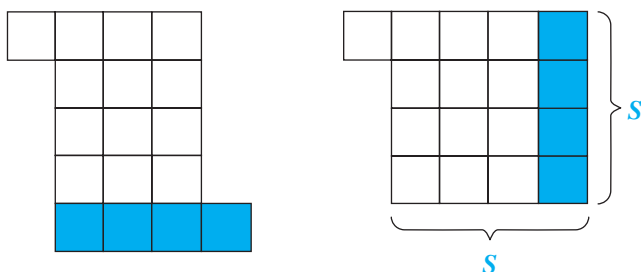
Fase, S	1	2	3	4
Tarjetas, T				

3. Describe el patrón en la manera en que aumenta el número de tarjetas T a medida que aumenta la fase S .
4. Usa tu respuesta del Problema 3 para predecir el número de tarjetas de la Fase 5 a la 8. Extiende tu tabla para incluir estos valores.
5. Construye o dibuja las cuatro siguientes fases del patrón y verifica las respuestas del Problema 4.

6. Evan encontró una ecuación para el número de tarjetas T , en la Fase S del patrón. Él razonó así: “Si quito las dos tarjetas de las esquinas dejas un rectángulo que es $S - 1$ tarjetas a lo largo de la parte superior y $S + 1$ tarjetas hacia abajo de lado. Multiplico esos números para calcular el número de tarjetas en el rectángulo. Después sumo las dos tarjetas de las esquinas para calcular el número total de tarjetas”. ¿Qué ecuación crees que encontró Evan?



7. Usando su tabla, Tala encontró una ecuación para T . “Primero S elevo al cuadrado. Después, veo en qué se diferencia S^2 del número de tarjetas para ese valor de S .” Prueba su idea con tu tabla: Eleva al cuadrado los números de la primera hilera y observa qué podrías hacerle a los cuadrados para obtener los números en la segunda fila. ¿Qué ecuación crees que encontró Tala?
8. Mikayla encontró la misma ecuación que Tala, pero de diferente manera. “Hay S tarjetas a lo largo de la parte inferior de la Fase S . Si quito esta hilera y la coloco verticalmente, puedo hacer un cuadrado con S tarjetas en cada lado, más una tarjeta extra.” Explica cómo el razonamiento de Mikayla produce la misma ecuación que encontró Tala.



9. Considera la ecuación que encontraron Tala y Mikayla para el patrón.
- Grafica las relaciones entre T y S . Aunque no parezca lógico tener un número de tarjetas negativo, piensa en la ecuación como una regla para generar pares ordenados y considera tanto los valores positivos como los negativos de S . Grafica suficientes puntos de manera que puedas dibujar una curva suave.
 - Describe la gráfica.
 - ¿Tiene eje de simetría la gráfica? De ser así, describe su ubicación.
 - ¿Cuál es el valor menor de T que se muestra en la gráfica?



Recuerda

Un *polígono* es una figura bidimensional cerrada, cuyos lados están formados por segmentos de recta.



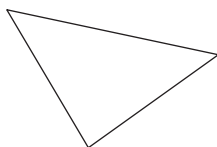
Serie de problemas C

He aquí un problema geométrico que se relaciona con una ecuación cuadrática, aunque la relación no es obvia al principio:

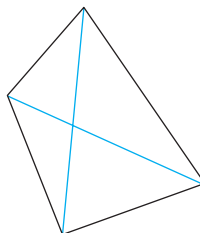
¿Cuántas diagonales tiene un polígono de n lados?

Probablemente no puedas contestar esta pregunta todavía. Pero si empiezas con unos cuantos polígonos, puedes buscar un patrón que te ayude a encontrar la respuesta.

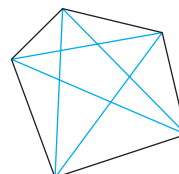
Los dibujos muestran las diagonales de los polígonos de 3, 4 y 5 lados.



3 lados
($n = 3$)



4 lados
($n = 4$)



5 lados
($n = 5$)

1. Dibuja un hexágono ($n = 6$) con un grupo completo de diagonales. Asegúrate de unir cada vértice del hexágono con todos los demás.
2. Copia y completa la tabla para mostrar el número de diagonales conectadas a cada vértice y el número total de diagonales por cada polígono enumerado.

Lados, n	3	4	5	6
Diagonales conectadas a cada vértice	0	1		
Diagonales totales, d	0	2		

3. Observa la segunda hilera de tu tabla.
 - a. Describe el patrón a que cambia el número de diagonales conectadas a cada vértice, a medida en que se aumenta el número de lados.
 - b. ¿Existe una relación lineal entre el número de lados y el número de diagonales conectadas a cada vértice? Explica.
4. Observa la tercera hilera de tu tabla.
 - a. Describe el patrón a que cambia el número total de diagonales, a medida que se aumenta el número de lados.
 - b. ¿Existe una relación lineal entre el número de lados y el número total de diagonales? Explica.



Un polígono de 20 lados se llama *icoságono*. Los matemáticos también lo llamarían *20-ágono*.

5. Considera un heptágono: un polígono de siete lados.
 - a. Usa el patrón en tu tabla para predecir el número de diagonales conectadas a cada vértice de un heptágono.
 - b. Predice el número total de diagonales en un heptágono.
 - c. Dibuja un heptágono, traza cuidadosamente y cuenta sus diagonales y verifica tus predicciones de las Partes a y b. Añade a tu tabla los datos del heptágono.
6. Sin dibujar más polígonos, amplía tu tabla para incluir datos de polígonos de 8, 9 y 10 lados. Explica cómo encontraste tus resultados.
7. ¿Cuántas diagonales tiene un polígono de 20 lados? Si puedes, calcula la respuesta sin ampliar tu tabla.
8. Escribe una ecuación para el número total de diagonales en un polígono de n lados. Explica cómo calculaste la respuesta.
9. Usa una ecuación para calcular el número de diagonales en un polígono de 100 lados.
10. ¿Qué forma crees que tendrá la gráfica de tu ecuación? Usa tu calculadora graficadora para verificar tu respuesta.

Comparte & resume

Considera las relaciones cuadráticas que has explorado en esta lección.

1. Escribe las ecuaciones de estas relaciones cuadráticas.
2. Vuelve a observar las gráficas de estas ecuaciones. ¿Qué tienen todas en común?
3. ¿Cómo puedes, al observar la ecuación, saber si sus gráficas no serán rectas?

Ejercicios por tu cuenta

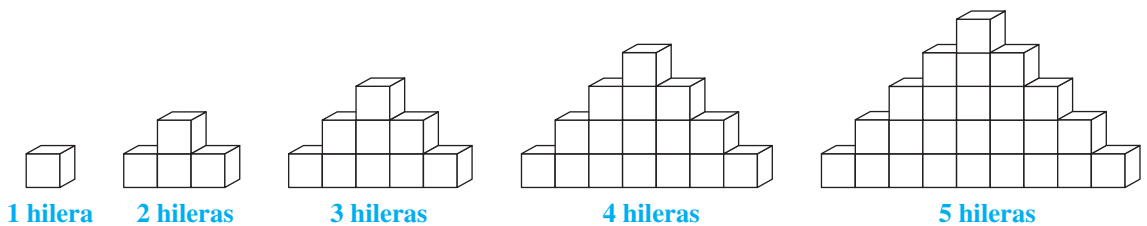
Practica & aplica



Recuerda

Si no tienes una calculadora con una tecla para π , puedes usar la aproximación 3.14 en tus cálculos.

1. El área de un círculo con radio r viene dada por la fórmula $A = \pi r^2$.
 - a. Haz una tabla de los valores de A a medida que r aumenta de 0 a 10 unidades.
 - b. Grafica los valores en una gráfica con r en el eje horizontal y A en el eje vertical. Conecta los puntos con una curva suave.
 - c. Se dan las áreas de tres círculos. Usa tu gráfica para calcular un valor aproximado para el radio de cada círculo.
 - i. 25 unidades cuadradas
 - ii. 100 unidades cuadradas
 - iii. 300 unidades cuadradas
 - d. Reemplaza cada radio en la fórmula del área y verifica tus resultados.
2. Imagina varias pilas de bloques como las que se muestran a continuación.



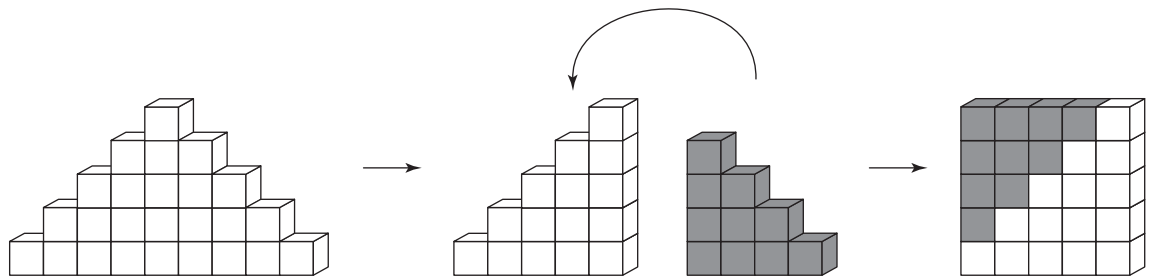
- a. Completa la tabla para mostrar el número de bloques en la hilera inferior a medida que aumenta el número de hileras.

Número de hileras, n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Número de bloques en la hilera inferior, b										

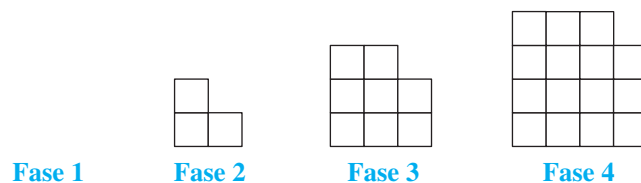
- b. ¿Cuántos bloques habría en la hilera inferior de una pila con 25 hileras? ¿Con n hileras?



- c. Piensa en la relación entre el número de hileras y el número de bloques en la hilera inferior. ¿Qué tipo de relación es?
- d. ¿Cuál es número *total* de bloques T necesarios para una pila de 5 hileras?
- e. Añade una nueva hilera a tu tabla para el número total de bloques T en cada pila y completa cada hilera.
- f. Escribe una ecuación que de el número total de bloques T en términos de n .
- g. Usa este diagrama para explicar por qué tu ecuación de la Parte f es lógica.



3. Observa cuidadosamente esta secuencia de figuras. Cada cuadrado tiene un área de 1 unidad cuadrada.



- a. Encuentra una fórmula para el área en unidades cuadradas, A , de la Fase n .
- b. Usa tu ecuación para explicar por qué no hay cuadrados en la Fase 1.
- c. Copia y completa la tabla.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	0	3	8	15						

- d. Amplía tu tabla para incluir valores de n con enteros negativos, de -10 a 0 . Grafica suficientes puntos en una gráfica entre -10 y 10 para dibujar una curva suave.
- e. Describe la gráfica.
- f. Encuentra el eje de simetría de la gráfica. ¿Qué valor de n atraviesa el eje de simetría?



4. Considera estas tres ecuaciones.

$$y = x^2 \qquad y = x^2 + 2 \qquad y = x^2 - 2$$

- Haz una tabla de los valores para cada ecuación, usa valores positivos y negativos para x . Grafica las tres gráficas en el mismo grupo de ejes.
- ¿Qué semejanzas observas en las tres gráficas?
- ¿Qué diferencias observas?

5. Considera estas tres ecuaciones.

$$y = -x^2 \qquad y = -x^2 + 2 \qquad y = -x^2 - 2$$

- Haz una tabla de los valores para cada ecuación, usa valores positivos y negativos para x . Grafica las tres gráficas en el mismo grupo de ejes.
- ¿Qué semejanzas observas en las tres gráficas?
- ¿Qué diferencias observas?

6. **Economía** Rosalinda construye pajareras de madera y las vende en las ferias de artesanías. Ella se dio cuenta que podía vender más pajareras cuando el precio era más bajo. Recordando las ferias pasadas, estimó que a un precio de p dólares, ella puede vender $200 - 2p$ pajareras durante dos días en la feria. Por ejemplo, si ella fija el precio a \$20, generalmente vende alrededor de 160 pajareras.

- Cuando una persona vende un producto, el dinero de la venta se llama *ingreso*. El ingreso de un producto se puede calcular multiplicando el número de artículos vendidos por el precio. Encuentra la fórmula para el ingreso R de Rosalinda en una feria de dos días, si ella cobró p dólares por cada pajarera.
- Haz una tabla de los valores para un precio p y un ingreso R . Enumera por lo menos 10 precios de \$0 a \$100.
- Grafica los valores en tu tabla, con p en el eje horizontal y R en el vertical. Debes encontrar puntos adicionales de manera que puedas dibujar una curva suave.
- ¿A qué precio gana el mayor ingreso Rosalinda? ¿Cuál es el ingreso?

7. Darlene hizo esta tabla de pares ordenados.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	0	3	8	15	24					

- Describe el patrón de cambio en los valores de y a medida que se aumentan en 1 los valores de x .

En tus propias palabras

¿En qué se diferencian las gráficas de relaciones cuadráticas con las de relaciones lineales? ¿En qué crees que se diferencien las ecuaciones?

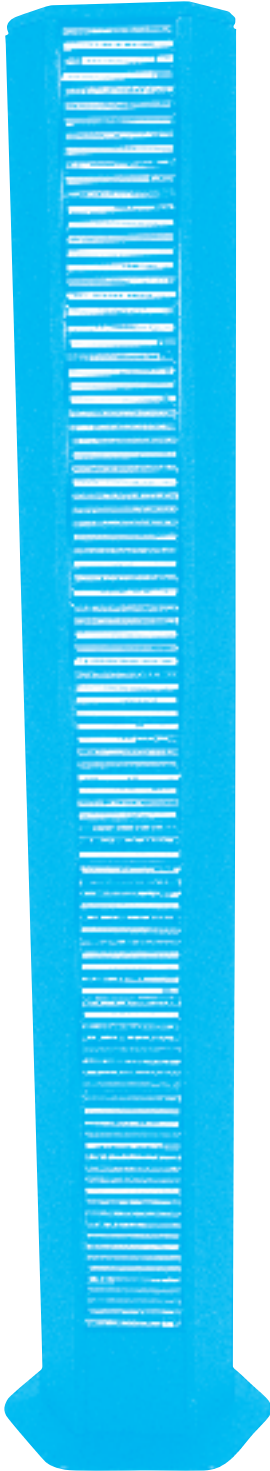
- Copia y completa la tabla de Darlene.
- Usa tu tabla para hacer una gráfica de estos pares ordenados. Conecta los puntos con una curva o recta suave.
- Describe tu gráfica.
- ¿Podría representar una relación cuadrática la tabla de Darlene? Explica.

8. Kai hizo esta tabla de pares ordenados.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	7	10	13	16	19					

- Describe el patrón de cambio en los valores de y a medida que aumentan en 1 los valores de x .
 - Completa la tabla de Kai.
 - Usa tu tabla para hacer una gráfica de estos pares ordenados. Conecta los puntos con una curva o recta suave.
 - Describe tu gráfica.
 - ¿Podría representar una relación cuadrática la tabla de Kai? Explica.
9. **Ciencia física** La distancia que recorre un auto antes de detenerse, depende de la velocidad del mismo.
- La *distancia de reacción* es la distancia que recorre un auto después de que el conductor se da cuenta que necesita detenerse y antes de que apliquen los frenos. Se puede representar con la ecuación $d = 0.25s$, donde s es la velocidad en kilómetros por segundo y d es la distancia en metros. La *distancia de frenado* es la distancia que recorre después de que el conductor aplica los frenos, hasta que el auto se detiene por completo. Se puede representar por $d = 0.006s^2$. Haz una tabla que muestre la distancia de reacción y la distancia de frenado para velocidades de 0 km a 80 km.
 - Grafica los puntos para la distancia de reacción y la distancia de frenado en un grupo de ejes. Dibuja una recta o curva suave a través de cada grupo de puntos. Rotula cada gráfica con su ecuación.
 - Para calcular la distancia total hasta detenerse se deben sumar la distancia de reacción y la distancia de frenado. Añade los valores de cada velocidad a tu tabla para calcular las distancias totales hasta detenerse para cada velocidad.
 - Grafica los valores en tu tabla la distancia total hasta detenerse en tu gráfica y conéctalas con una recta o curva suave. ¿Cuál es la ecuación de esta relación? ¿Qué tipo de relación parece ser? (Ayuda: Piensa en lo que hiciste para generar los puntos de las distancias hasta detenerse.)

Repaso mixto



Evalúa cada expresión si $a = -2$ y $b = 3$.

10. a^a

11. $a^b \cdot a^a$

12. $(b - a)^{-a}$

13. a^{b-a}

14. $(ab)^{-a}$

15. $\frac{a^2}{b^2}$

Proporciona la pendiente y la intersección y para la gráfica de cada ecuación.

16. $y = -3x + 5$

17. $2y = 2 - 3.2x$

18. $3y + 1.5 = x$

19. $x = y$

20. Daniela tiene cierto número de cedés. Sea d el número de cedés que ella tiene. Escribe una expresión para cada una de las siguientes.

- a. el número que tiene Andrés, que es 3 veces el número que tiene Daniela
- b. el número que tiene Tyree, que es una décima del número que tiene Andrés
- c. el número que tiene Sandra, que es 7 más que la mitad del número que tiene Tyree
- d. Si Sandra tiene 13 cedés, ¿cuántos tiene cada una de las otras tres personas?

Escribe una ecuación para la recta que pasaría por los puntos dados.

21. Puntos A y C

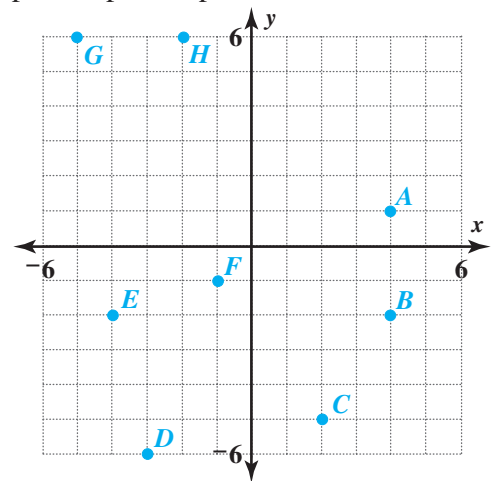
22. Puntos A y B

23. Puntos D y E

24. Puntos A y F

25. Puntos F y el origen

26. Puntos G y H



2.2

Familias cuadráticas

En la Lección 2.1, exploraste varias relaciones cuadráticas:

$$y = x^2 \quad d = \frac{n^2 - 3n}{2} \quad V = 4.5x^2 \quad T = S^2 + 1$$

VOCABULARIO

expresión cuadrática

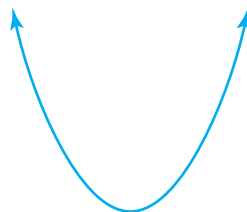
Cualquier expresión que se pueda escribir en la forma $ax^2 + bx + c$, donde a , b y c son constantes y $a \neq 0$, se llama **expresión cuadrática** en x .

El primer término, ax^2 , se llama *término* x^2 . El número multiplicado por x^2 , representado por a , se llama *coeficiente* del término x^2 . De igual forma, bx es el *término* x y b es su coeficiente. Los coeficientes a y b y la constante c , pueden representar números negativos o positivos, pero a no puede ser 0. (¿Entiendes por qué?)

VOCABULARIO

ecuación cuadrática

Una **ecuación cuadrática** se puede escribir en la forma $y = ax^2 + bx + c$, donde $a \neq 0$. Como las de la Lección 2.1, todas las ecuaciones cuadráticas son simétricas, las gráficas en forma de U se llaman *parábolas*.



Antes de que examines la conexión entre gráficas, tablas y relaciones de ecuaciones cuadráticas, te será útil repasar las gráficas, las tablas y las ecuaciones de relaciones lineales.



Los espejos en forma de parábolas se usan en las linternas y faros de automóviles para enfocar la luz en un haz estrecho.



Piensa & comenta

A continuación, se muestran las ecuaciones, las gráficas y las tablas de cuatro relaciones lineales. Relaciona cada ecuación con su gráfica y tabla y explica cómo estableciste la relación.

Ecuación 1: $y = x$

Ecuación 2: $y = 2x$

Ecuación 3: $y = 2x + 3$

Ecuación 4: $y = -2x + 3$

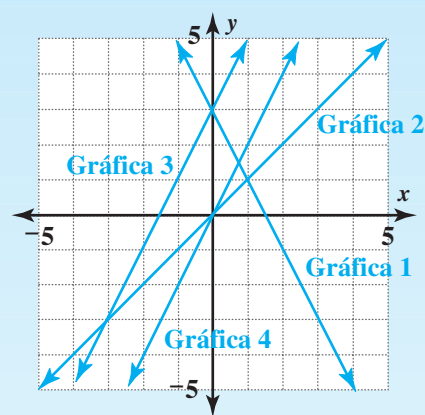


Tabla 1

x	-2	-1	0	1	2	3
y	7	5	3	1	-1	-3

Tabla 2

x	-2	-1	0	1	2	3
y	-4	-2	0	2	4	6

Tabla 3

x	-2	-1	0	1	2	3
y	-2	-1	0	1	2	3

Tabla 4

x	-2	-1	0	1	2	3
y	-1	1	3	5	7	9

Para las ecuaciones lineales de la forma $y = mx + b$, ¿cómo afecta la gráfica el valor de m ?

Para las ecuaciones lineales de la forma $y = mx + b$, ¿cómo afecta la gráfica el valor de b ?

Investigación 1 Tablas, gráficas y ecuaciones cuadráticas

Ahora examinará las relaciones entre ecuaciones, tablas y gráficas de relaciones cuadráticas.

Serie de problemas A

- La tabla de la siguiente página tiene columnas para seis ecuaciones cuadráticas. Copia y completa la tabla para dar los valores de y para los valores de x dados. (Ayuda: Puedes ahorrar tiempo completando primero la Columna A y buscando relaciones entre su ecuación, $y = x^2$, y las otras ecuaciones. Por ejemplo, si conoces el valor de x^2 en la Columna A, ¿cómo puedes determinar fácilmente $x^2 + 1$ en la Columna B?)



Recuerda

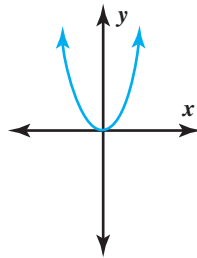
La expresión $-n^2$ quiere decir $-(n^2)$, no $(-n)^2$. Para calcular $-n^2$, eleva n al cuadrado y toma el opuesto del resultado.

	A	B	C	D	E	F
x	$y = x^2$	$y = x^2 + 1$	$y = x^2 - 1$	$y = -x^2$	$y = (x + 1)^2$	$y = (x - 1)^2$
-4	16					
-3.2	10.24					
-2.2						
-1						
-0.5						
0						
0.5						
1						
2.2						
3.2						
4						

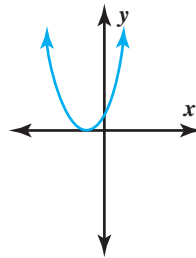
2. Compara los valores en cada una de las Columnas de B a F con los de la Columna A. Explica cómo se relaciona cada comparación con las ecuaciones.

Completa las Partes a, b y c para las gráficas de los Problemas 3 al 8.

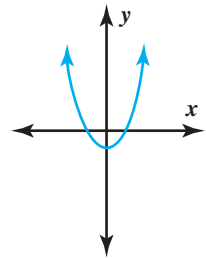
3.



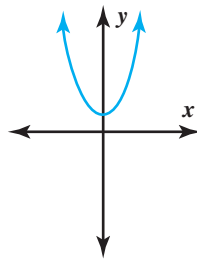
4.



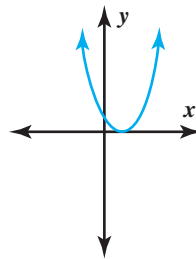
5.



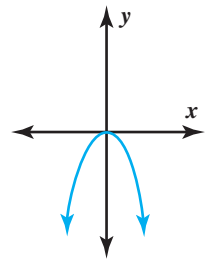
6.



7.



8.



- a. Relaciona cada gráfica con una de las ecuaciones cuadráticas de las Columnas A a F y explica tu razonamiento.
- b. Describe en qué se diferencia la gráfica de la gráfica de $y = x^2$.
- c. Describe el eje de simetría de la gráfica.

Serie de problemas B

Encuentra una ecuación cuadrática para las tablas de los Problemas 1 al 7.
Ayuda: Para los Problemas 2 al 7, compara los valores con los de las tablas de los problemas previos.

1.

x	y
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9

2.

x	y
-3	109
-2	104
-1	101
0	100
1	101
2	104
3	109

3.

x	y
-3	5
-2	0
-1	-3
0	-4
1	-3
2	0
3	5

4.

x	y
-3	13
-2	8
-1	5
0	4
1	5
2	8
3	13

5.

x	y
-3	90
-2	40
-1	10
0	0
1	10
2	40
3	90

6.

x	y
-3	70
-2	20
-1	-10
0	-20
1	-10
2	20
3	70

7.

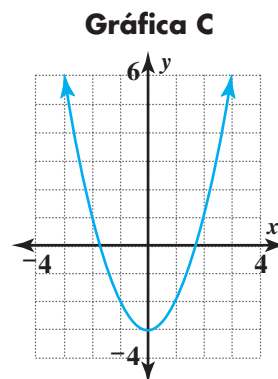
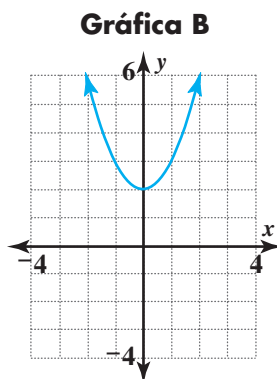
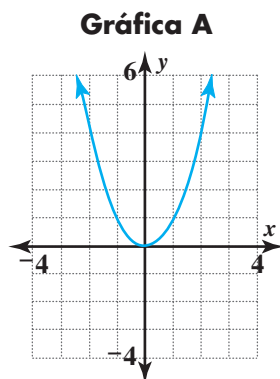
x	y
-3	36
-2	16
-1	4
0	0
1	4
2	16
3	36

8.

x	y
-3	37
-2	17
-1	5
0	1
1	5
2	17
3	37

Comparte & resume

1. La Gráfica A es la gráfica de $y = x^2$. Escribe ecuaciones para otras gráficas y explica cómo sabes que las ecuaciones encajan con las gráficas.



2. La Tabla A representa la relación $y = x^2$. Escribe las ecuaciones cuadráticas representadas por las Tablas B y C. Explica cómo encontraste tus ecuaciones.

Tabla A		Tabla B		Tabla C	
x	y	x	y	x	y
-4	16	-4	-48	-4	36
-3	9	-3	-27	-3	25
-2	4	-2	-12	-2	16
-1	1	-1	-3	-1	9
0	0	0	0	0	4
1	1	1	-3	1	1
2	4	2	-12	2	0
3	9	3	-27	3	1
4	16	4	-48	4	4

Investigación 2 Ecuaciones cuadráticas y sus gráficas



Datos de interés

Los cables de un puente colgante tienen forma de parábola.

Las ecuaciones cuadráticas se pueden escribir en la forma $y = ax^2 + bx + c$, donde a , b y c son constantes y a no es 0. Como el coeficiente m y la constante b en la ecuación lineal $y = mx + b$, los coeficientes y la constante en una ecuación cuadrática te indican algo sobre la gráfica de la ecuación.

En la Serie de problemas C, vas a explorar cómo el coeficiente a y la constante c afectan las gráficas de las ecuaciones cuadráticas. En la Serie de problemas D, vas a ver el efecto de b , que no es muy fácil de observar.

Serie de problemas C

1. Completa las Partes a, b y c para cada grupo de ecuaciones cuadráticas.

Grupo I	Grupo II	Grupo III	Grupo IV
$y = x^2$	$y = x^2$	$y = x^2$	$y = -x^2$
$y = x^2 + 1$	$y = x^2 - 1$	$y = 2x^2$	$y = -2x^2$
$y = x^2 + 3$	$y = x^2 - 3$	$y = \frac{1}{2}x^2$	$y = -\frac{1}{2}x^2$

- a. Grafica las tres ecuaciones en la misma pantalla de tu calculadora. Selecciona una pantalla que muestre claramente las tres gráficas. Haz un bosquejo de las gráficas. Rotula los valores mínimo y máximo en cada eje. Rotula también cada gráfica con su ecuación.
- b. Para cada grupo de ecuaciones, escribe una o dos oraciones sobre sus semejanzas y diferencias.
- c. Para cada grupo de ecuaciones, escribe una ecuación cuadrática más que también pertenezca al grupo.
2. Describe en qué se parecen y en qué se diferencian las gráficas del Grupo I y las del Grupo II.
3. Describe en qué se parecen y en qué se diferencian las gráficas del Grupo III y el Grupo IV.
4. Usa lo que aprendiste en los Problemas 1 al 3 para predecir cómo se verán las gráficas de cada una de las siguientes ecuaciones y grafícalas en el mismo grupo de ejes. Asegúrate de rotular cada eje y rotular cada gráfica con su ecuación. Verifica tu predicción con tu calculadora.
- a. $y = x^2 + 2$
- b. $y = 3x^2 + 2$
- c. $y = -3x^2 + 2$
- d. $y = \frac{1}{2}x^2 - 3$
5. Todas las ecuaciones que observaste en esta Serie de problemas son de la forma $y = ax^2 + bx + c$, pero el coeficiente b es igual a 0. Explica cómo afectan la gráfica de una ecuación los valores de a y de c .

Es posible que en la Serie de problemas C hayas visto que las ecuaciones de la forma $y = ax^2 + c$ tienen sus puntos más altos o más bajos en el punto $(0, c)$. El punto más alto o el punto más bajo de una parábola se llama **vértice**.

No todas las parábolas tienen sus vértices en el eje y . En la siguiente serie de problemas, verás las propiedades de una ecuación que determinan dónde estará el vértice de su gráfica.

Serie de problemas **D**

Considera estos cuatro grupos de ecuaciones cuadráticas.

Grupo I

$$y = x^2 + 2$$

$$y = x^2 + 3x + 2$$

$$y = x^2 + 6x + 2$$

Grupo II

$$y = x^2 + 2$$

$$y = x^2 - 3x + 2$$

$$y = x^2 - 6x + 2$$

Grupo III

$$y = -2x^2 + 2$$

$$y = -2x^2 + 3x + 2$$

$$y = -2x^2 + 6x + 2$$

Grupo IV

$$y = -2x^2 + 2$$

$$y = -2x^2 - 3x + 2$$

$$y = -2x^2 - 6x + 2$$

- En cada grupo, todas las ecuaciones tienen los mismos valores de a y c . Usa lo que aprendiste sobre los efectos de a y c para predecir en qué se parecerán las gráficas de cada grupo.
- Para cada grupo de ecuaciones, completa las Partes a, b y c.
 - Grafica las tres ecuaciones en la misma pantalla de tu calculadora. Selecciona una pantalla que muestre claramente las tres gráficas. Haz un bosquejo de las gráficas. Recuerda rotular los ejes y cada gráfica con su ecuación.
 - ¿Estuvieron correctas las predicciones en el Problema 1?
 - Para cada grupo de ecuaciones, escribe una oración o dos explicando en qué se parecen y en qué se diferencian.
- ¿Qué patrones puedes ver en el cambio de ubicación de las parábolas a medida que aumenta o disminuye b a partir del 0?

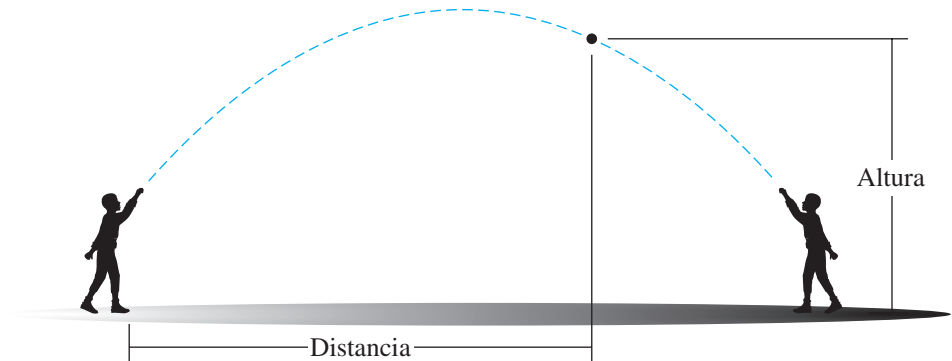
Comparte & resume

- Imagina que mueves la gráfica de $y = -2x^2 + 3$ dos unidades hacia arriba sin cambiar su forma. ¿Cuál sería la ecuación de la nueva parábola?
- Describe brevemente o haz un bosquejo preliminar de la gráfica de $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2$.
- Para cada ecuación cuadrática, indica si el vértice está en el eje y .

a. $y = \frac{1}{2}x^2 - 3$	b. $y = x^2 - 3x + 1$
c. $y = -x^2$	d. $y = -3x^2 + x + 13$
e. $y = -x^2 + 4$	f. $y = 7x^2 + 3x$

Investigación 3 Usa relaciones cuadráticas

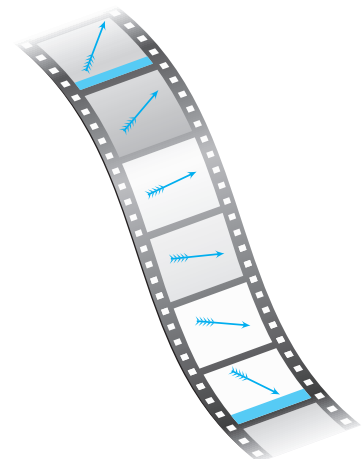
Las ecuaciones cuadráticas y las gráficas te pueden ayudar a entender el movimiento de los cuerpos que se lanzan al aire. Si un cuerpo, como una pelota, se dispara a un ángulo entre 0° y 90° (no en línea recta hacia arriba o hacia abajo), su *trayectoria* (el camino que sigue) se aproxima a la forma de una parábola.



Esto quiere decir que para aproximarte a la relación entre la altura del cuerpo y la distancia horizontal que recorre, puedes usar una ecuación cuadrática. Como verás en la Serie de problemas A, también existe una relación cuadrática entre el tiempo que el cuerpo está en el aire y su altura.

Serie de problemas E

Un fotógrafo prepara una cámara para tomar fotos de una flecha que se ha disparado al aire. La cámara toma una foto cada medio segundo. Los puntos en la gráfica muestran la altura de la flecha, en metros, cada medio segundo después de que la cámara empezó a tomar las fotos. Se ha dibujado una parábola uniando los puntos.



1. Considera la altura de la flecha cuando la cámara toma la primera foto.
 - a. ¿A qué altura estaba la flecha en ese momento? Explica cómo lo sabes.
 - b. ¿Cuánto tiempo transcurrió desde ese punto hasta que la flecha regresó a esa altura? Explica cómo lo sabes.
2. ¿Cuánto tiempo pasó desde que se tomó la primera foto hasta que caer al suelo la flecha? ¿Cómo lo determinaste?
3. La flecha se disparó desde una altura de 1.5 m (justo sobre la altura del hombro). ¿Cuánto tiempo antes de la primera foto se disparó la flecha? ¿Cómo lo determinaste?
4. Aproximadamente, ¿cuánto tiempo estuvo la flecha en el aire? Explica cómo calculaste la respuesta.
5. Ahora piensa a qué altura se elevó la flecha.
 - a. ¿Cuál fue la altura máxima de la flecha? Explica cómo calculaste la respuesta.
 - b. ¿Cuántos segundos después de ser disparada, la flecha alcanzó su altura máxima? Explica cómo calculaste la respuesta.

Serie de problemas F

Un *quarterback* lanza un pase de manera que la relación entre su altura, y , y la distancia horizontal que recorre, x , puede describirse con esta ecuación:

$$y = 2 + 0.8x - 0.02x^2$$

Tanto y como x se miden en yardas.

1. ¿Se abrirá hacia arriba o hacia abajo la gráfica de esta ecuación cuadrática? Explica.
2. Usa tu calculadora para graficar la ecuación. Usa una pantalla que dé una perspectiva de la gráfica con el tiempo total que el balón estuvo en el aire. Puedes cambiar los parámetros de la pantalla ajustando los valores mínimos y máximos de las intersecciones axiales y las escalas x y y . Para este problema, prueba con una escala x de 10 y una escala y de 2. Traza la gráfica, asegurándote de rotular los ejes.

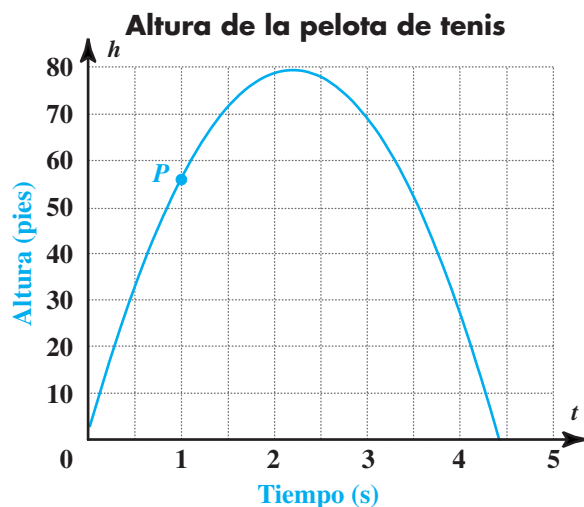
Para los Problemas 3 al 5, usa la calculadora graficadora o la ecuación para contestar la pregunta.

3. ¿Desde qué altura se lanzó el balón? Explica cómo calculaste la respuesta.
4. ¿Cuál fue la altura máxima que alcanzó el balón? Explica cómo calculaste la respuesta.
5. Un receptor atrapó el balón en la zona final a la misma altura a la que fue lanzado. ¿Cuánta distancia cubrió el pase antes de ser atrapado? Explica cómo calculaste la respuesta.



Comparte & resume

Marcus lanzó al aire una pelota de tenis. La gráfica muestra la altura h en pies de la pelota a lo largo del tiempo t en segundos. El punto P muestra la altura de la pelota a $t = 1$.



1. Explica cómo usar la gráfica para estimar cuándo alcanzó la pelota su punto más alto.
2. Explica cómo usar la gráfica para calcular otro instante en que la pelota tuvo la misma altura que tenía en $t = 1$.

Investigación 4 **Compara relaciones cuadráticas y otras relaciones**

Una manera de distinguir los diferentes tipos de relaciones es examinar sus ecuaciones.

Serie de problemas G

Una manera de distinguir los diferentes tipos de relaciones es examinar sus ecuaciones.

Indica si cada ecuación es cuadrática. Si una ecuación no es cuadrática, explica cómo lo sabes.

1. $y = 3m^2 + 2m + 7$

2. $y = (x + 3)^2 + 7$

3. $y = (x - 2)^2$

4. $y = 10$

5. $y = \frac{2}{x^2}$

6. $y = b(b + 1)$

7. $y = 2^x$

8. $y = 3x^3 + 2x^2 + 3$

9. $y = -2.5x^2$

10. $y = 4n^2 - 7n$

11. $y = 7p + 3$

12. $y = n(n^2 - 3)$

VOCABULARIO ecuación cúbica

Algunas de las ecuaciones en la Serie de problemas G son ecuaciones *cúbicas*. Una **ecuación cúbica** se puede escribir en la forma $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, donde $a \neq 0$. Todos estos son ejemplos de ecuaciones cúbicas:

$$y = x^3$$

$$y = 2x^3$$

$$y = 0.5x^3 - x + 3$$

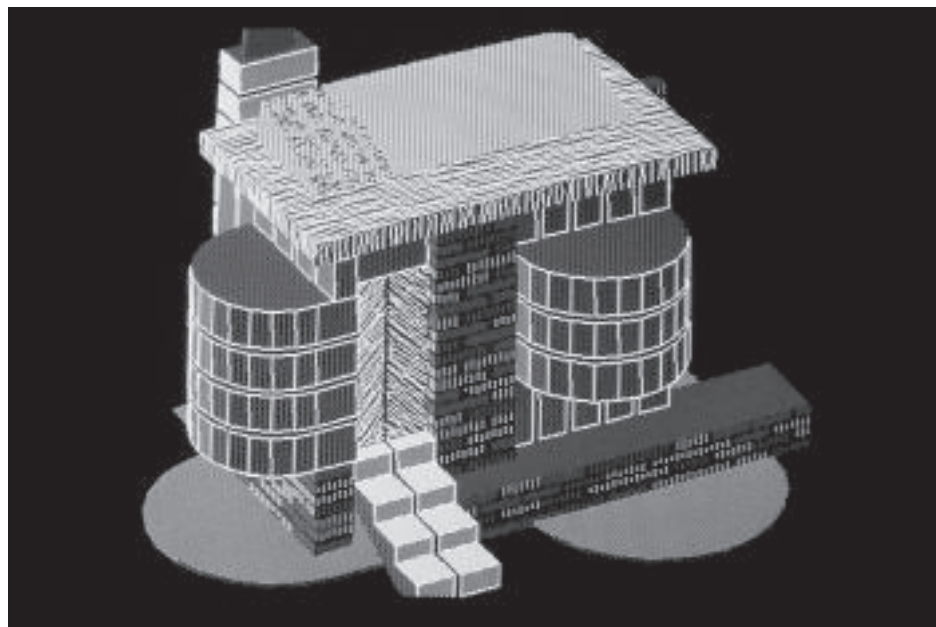
$$y = x^3 + 2x^2$$

Las gráficas de las ecuaciones cúbicas tienen sus propias características, diferentes a las de las ecuaciones cuadráticas y lineales.



Datos de interés

Las ecuaciones cúbicas se usan en los programas computarizados de diseño como ayuda para dibujar líneas curvas y superficies.



Serie de problemas **H**

1. Considera estas tres ecuaciones.

$$y = x \qquad y = x^2 \qquad y = x^3$$

- Grafica las tres ecuaciones en la misma pantalla de tu calculadora. Selecciona una pantalla que muestre claramente las tres gráficas. Bosqueja las gráficas y recuerda rotular los ejes en las gráficas.
- Escribe una oración o dos explicando en qué se parecen y en qué se diferencian las gráficas.
- Da las coordenadas de los dos puntos donde se intersecan las tres gráficas.

Has visto cómo los valores de m y b afectan la gráfica de $y = mx + b$ y cómo los valores de a , b y c afectan la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$.

Vas a considerar ecuaciones cúbicas simples de la forma $y = ax^3 + d$ para ver cómo se ven afectadas las gráficas al cambiar el coeficiente a y la constante d .

2. Completa las Partes a, b y c para cada uno de estos tres grupos de ecuaciones.

Grupo I

$$y = x^3$$

$$y = x^3 + 3$$

$$y = x^3 - 3$$

Grupo II

$$y = 2x^3$$

$$y = \frac{1}{2}x^3$$

$$y = -2x^3$$

Grupo III

$$y = 3x^3 + 1$$

$$y = 3x^3 - 1$$

$$y = -3x^3 - 1$$

- Grafica las tres ecuaciones en la misma pantalla de tu calculadora. Selecciona una pantalla que muestre claramente las tres gráficas. Haz un bosquejo y rotula las gráficas.
- Escribe una oración o dos indicando en qué se parecen y en qué se diferencian.
- ¿Qué parece indicarte el coeficiente del término x^3 acerca de la gráfica?
- ¿Qué te indica la constante acerca de la gráfica?



Las palabras *lineal*, *cuadrática* y *cúbica* provienen de la idea de que las *rectas*, los *cuadrados* (también llamados *cuadrángulos*) y los *cubos* tienen 1, 2 y 3 dimensiones, respectivamente.

Serie de problemas

Ahora, considera lo que sucede cuando una ecuación cúbica tiene los términos x^2 y x . Considera estas tres ecuaciones.

$$y = x^3 - x \quad y = -x^3 + 2x^2 + 5x - 6 \quad y = 2x^3 - x^2 - 5x - 2$$

1. Grafica las tres ecuaciones en la misma pantalla de tu calculadora y haz un bosquejo de las gráficas. Asegúrate de rotular las gráficas y los ejes.
2. Describe en palabras las formas generales de las gráficas.
3. Para cada gráfica, encuentra los puntos donde la gráfica cruza las intersecciones axiales.
4. Supón que mueves la gráfica de $y = x^3 - x$ 1 unidad hacia arriba.
 - a. ¿Cuál es la ecuación de la nueva gráfica?
 - b. Grafica la nueva ecuación. ¿Cuántas intersecciones x tiene la gráfica?

Comparte & resume

Vuelve a revisar las gráficas que hiciste para esta investigación. Describe lo que observas sobre las diferencias entre las gráficas de las relaciones lineales, cuadráticas y cúbicas.



Con frecuencia, las ecuaciones cúbicas se incluyen en el diseño de las secciones curvas de los veleros.



Resuelve gráficas de acertijos de diseño

MATERIALES

calculadora
graficadora

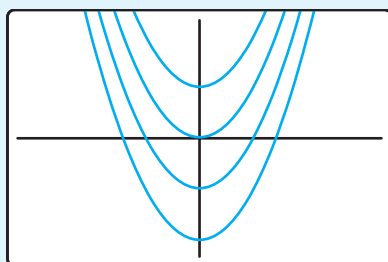


Recuerda

El punto donde se
intersecan los ejes x
y y , $(0, 0)$, se llama
el origen.

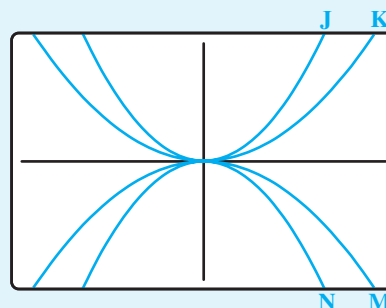
Las gráficas de ecuaciones cuadráticas sirven para hacer estos diseños sencillos.

Diseño A



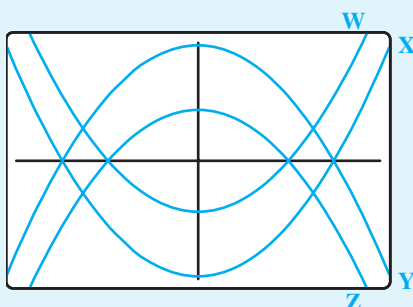
En este diseño, las parábolas están
igualmente separadas y tienen su
vértice en el eje y .

Diseño B



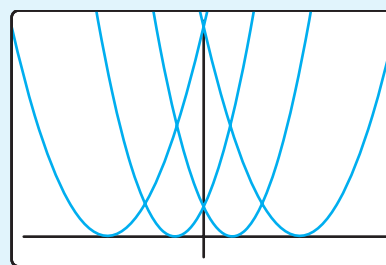
En este diseño, cada parábola tiene un
vértice en el origen. La Parábola J
tiene el mismo ancho que la Parábola
N. La Parábola K tiene el mismo
ancho que la Parábola M.

Diseño C



En este diseño, la Parábola W tiene el
mismo ancho que la Parábola Z y sus
vértices están a la misma distancia a
partir del origen. La Parábola X tiene
el mismo ancho que la Parábola Y y
sus vértices están a la misma distan-
cia a partir del origen.

Diseño D



En este diseño, los vértices de las
cuatro parábolas están igualmente
separados a lo largo del eje x . Dos de
estos puntos están a la izquierda del
origen y dos a la derecha.

Vas a usar lo que aprendiste sobre relaciones cuadráticas para recrear estos
diseños en tu calculadora. Después, crearás tu propio diseño.

Pruébalo

Con tu grupo, selecciona uno de los Diseños A, B o C. Trata de crear el diseño en tu calculadora. Usa ecuaciones de la forma $y = ax^2 + bx + c$ y prueba con diferentes valores de a , b y c . Es posible que necesites ajustar la pantalla para hacer que los diseños se vean de la manera deseada. (El Diseño D es el más difícil. Más adelante tendrás oportunidad de hacerlo.)

1. Cuando hayas hecho el diseño, traza su gráfica. Rotula cada curva con su ecuación. También rotula los ejes, incluye los valores máximo y mínimo en cada eje.
2. Diferentes grupos de ecuaciones y parámetros de pantalla pueden proporcionar el mismo diseño. Compara tus resultados de la Pregunta 1 con los de otros miembros del grupo o con otros grupos que hayan escogido tu diseño. ¿Registraste las mismas ecuaciones y parámetros de pantalla?

Pruébalo otra vez

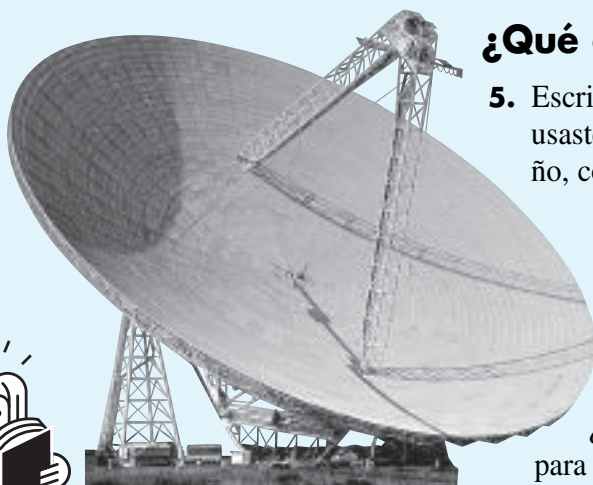
3. Ahora, crea cada uno de los otros tres diseños. Para cada diseño, haz su dibujo y registra las ecuaciones y los parámetros de pantalla que usaste.

Amplía el juego

4. Trabaja con tu grupo y haz un nuevo diseño de las gráficas de cuatro ecuaciones cuadráticas.
 - a. Haz un dibujo y, *en una hoja aparte*, registra las ecuaciones y parámetros de pantalla que usaste.
 - b. Intercambia diseños con otro grupo y trata de recrear su diseño.

¿Qué aprendiste?

5. Escribe un informe sobre las estrategias que usaste para recrear los diseños. Para cada diseño, comenta estos puntos:
 - a. ¿Cómo cambiaste los coeficientes, a o b , o la constante c , para crear cada diseño?
 - b. ¿Tiene alguno de los coeficientes o constantes un valor de 0? De ser así, ¿por qué se necesitó un valor igual a 0 para hacer el diseño?
 - c. ¿Cambiaste los parámetros de pantalla para hacer alguno de los diseños? Si fue así, explica cómo afecta al diseño el cambiar el rango de los valores x o el de los valores y .



Los diseños de las antenas parabólicas se basan en la parábola.

Ejercicios por tu cuenta

Practica & aplica

1. Para cada tabla de valores, encuentra una ecuación que la pueda representar. Busca relaciones entre las tablas que puedan ayudarte a determinar las ecuaciones. Explica cómo encontraste las soluciones.

a.

x	y
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9

b.

x	y
-3	25
-2	16
-1	9
0	4
1	1
2	0
3	1

c.

x	y
-3	0
-2	1
-1	4
0	9
1	16
2	25
3	36

d.

x	y
-3	-18
-2	-8
-1	-2
0	0
1	-2
2	-8
3	-18

e.

x	y
-3	-6
-2	-4
-1	-2
0	0
1	2
2	4
3	6

f.

x	y
-3	-8
-2	2
-1	8
0	10
1	8
2	2
3	-8

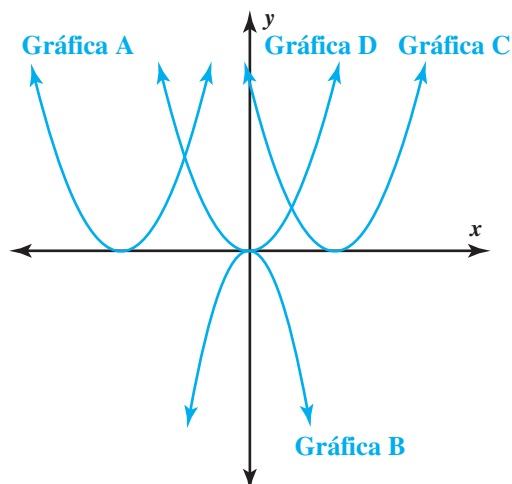
En los Ejercicios 2 al 5, relaciona la ecuación con una de las gráficas a continuación. Explica tu razonamiento.

2. $y = x^2$

3. $y = (x - 2)^2$

4. $y = (x + 3)^2$

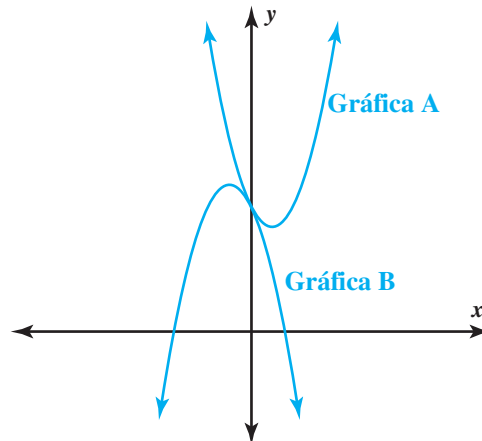
5. $y = -2x^2$



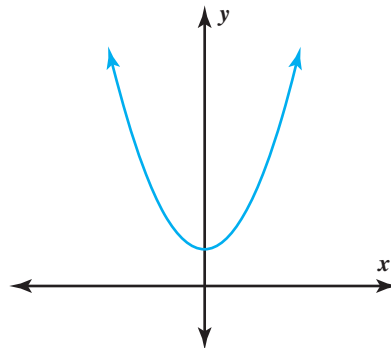
En los Ejercicios 6 y 7, relaciona la ecuación con una de las gráficas a continuación. Explica tu razonamiento.

6. $y = -2x^2 - 2x + 3$

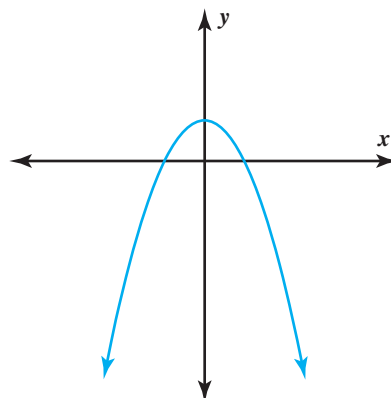
7. $y = 2x^2 - 2x + 3$



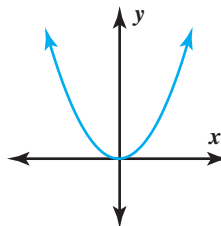
8. ¿Podría ser ésta la gráfica de la ecuación $y = -x^2 + 1$? Explica.



9. ¿Podría ser ésta la gráfica de la ecuación $y = -x^2 - 1$? Explica.



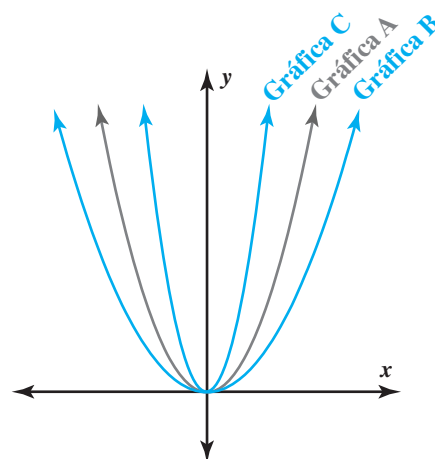
10. ¿Podría ésta ser la gráfica de la ecuación $y = x^2 + 1$? Explica.



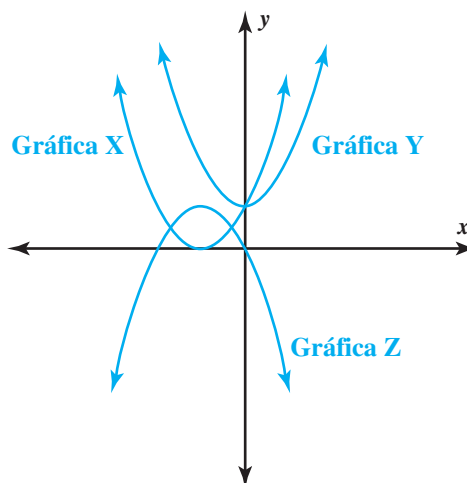
11. La Gráfica A es la gráfica de $y = x^2$.

- a. La Gráfica B es la gráfica de $y = 2x^2$ ó de $y = \frac{x^2}{2}$.
¿Cuál es la ecuación correcta?
Explica cómo lo sabes.

- b. La Gráfica C es la gráfica de $y = 3x^2$ ó de $y = \frac{x^2}{3}$.
¿Cuál es la ecuación correcta?
Explica cómo lo sabes.

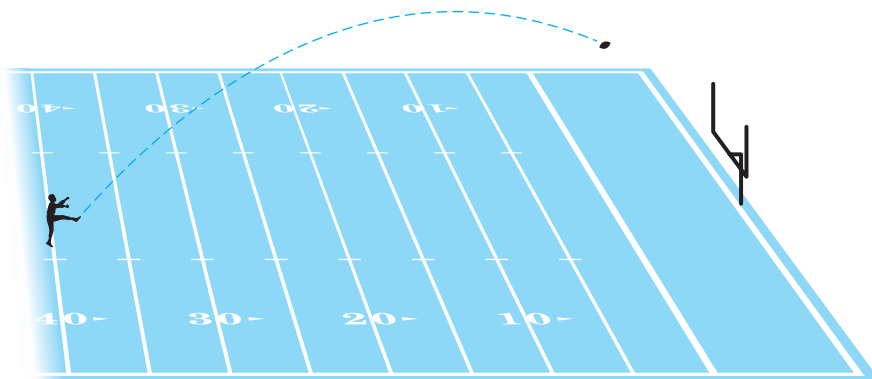


12. Considera estas tres gráficas.



- a. ¿Podría la Gráfica X ser la gráfica de $y = x^2 + 1$? Explica.
b. ¿Podría la Gráfica Y ser la gráfica de $y = (x + 1)^2$? Explica.
c. ¿Podría la Gráfica Z ser la gráfica de $y = -x^2 + 1$? Explica.

- 13. Deportes** Un pateador de un equipo de fútbol americano intentó tres goles de campo durante un partido. Pateó los tres desde la yarda 40 del oponente, que se encuentra a 50 yardas de la portería. Para que un gol de campo tenga validez, debe pasar sin tocar el travesaño, el cual mide 10 pies de altura.



El balón de fútbol siguió trayectorias diferentes por el aire con cada patada. Estas ecuaciones dan la altura de la patada en pies, h , para cualquier distancia en yardas, d , desde el pateador. Cada patada fue dirigida directamente al centro de la portería.

Patada 1: $h = 3.56d - 0.079d^2$

Patada 2: $h = 1.4d - 0.0246d^2$

Patada 3: $h = 2d - 0.033d^2$

- Traza suficientes puntos para cada patada de modo que puedas dibujar una curva suave. Traza las tres gráficas en los mismos ejes y rotúlalos Patada 1, Patada 2 y Patada 3. Coloca la distancia desde el pateador, de 0 a 70 yardas, en el eje horizontal y la altura, de 0 a 50 pies, en el eje vertical.
- Usa tu gráfica para estimar la altura máxima de cada patada.
- Usa tu gráfica para estimar la cantidad de yardas que recorrió cada patada sobre el campo, antes de que el balón golpeará el suelo.
- Para lograr el gol de campo, el balón debe pasar por encima de la portería. Esto quiere decir que por lo menos debe tener 10 pies de altura cuando llegue al poste, que se encuentra a 50 yardas del pateador.

Usa una gráfica para estimar si alguna de las patadas podría haber marcado un gol de campo. Explica tu razonamiento.

Indica si cada relación es cuadrática.

14. $y = 3x + 5$

15. $y = -(x + 1)^2$

16. $y = \frac{5}{x}$

17. $y = (x - 1)^2$

18. $y = -(x + 1)$

19. $y = \frac{5}{x^2}$

20. $y = (3x + 5)^2$

21. $y = 7x^3 + 3x^2 + 2$

22. $y = x^3 + 7x + 5$

23. $y = 2^x$

24. Considera estas tres ecuaciones.

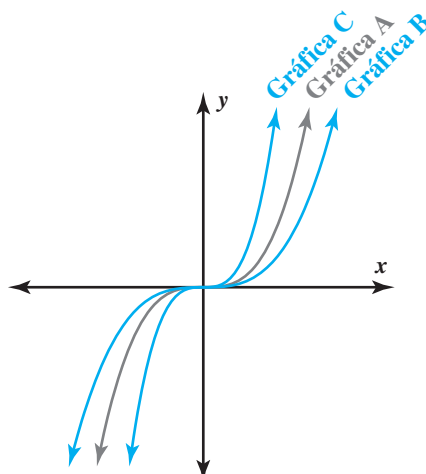
$$y = x + 3$$

$$y = x^2 + 3$$

$$y = x^3 + 3$$

- a.** Para cada ecuación, haz un dibujo preliminar que muestre de manera general la forma de la gráfica. Traza las tres gráficas en el mismo grupo de ejes.
- b.** Escribe una oración o dos explicando en qué se parecen y en qué se diferencian las gráficas.

25. La Gráfica A es la gráfica de $y = x^3$.



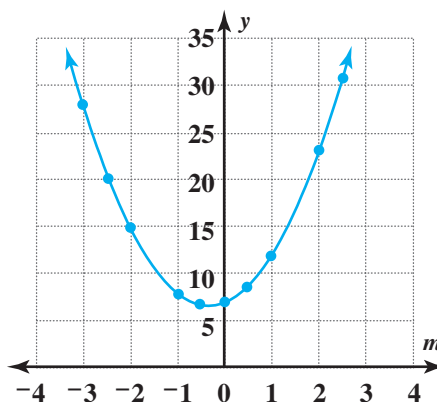
- a.** La Gráfica B es la gráfica de $y = \frac{x^3}{2}$ ó de $y = 2x^3$. ¿Cuál es la ecuación correcta? Explica.
- b.** La Gráfica C es la gráfica de $y = \frac{x^3}{3}$ ó de $y = 3x^3$. ¿Cuál es la ecuación correcta? Explica.

- 26.** Las siguientes ecuaciones cuadráticas son más complicadas que las de la Investigación 1. Así como con las ecuaciones más sencillas, puedes hacer una tabla de valores y trazar una gráfica de la ecuación.

$$y = 3m^2 + 2m + 7 \quad p = n^2 + n - 6 \quad s = 2t^2 - 3t + 1$$

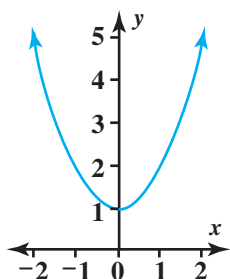
Aquí hay una tabla de valores y una gráfica para $y = 3m^2 + 2m + 7$.

m	-3	-2.5	-2	-1	-0.5	0	0.5	1	2	2.5
y	28	20.75	15	8	6.75	7	8.75	12	23	30.75

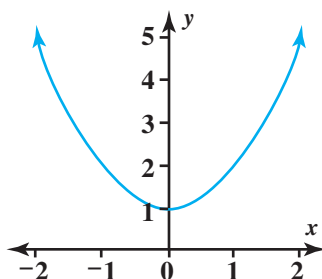


- Prepara una tabla de pares ordenados para $p = n^2 + n - 6$. Traza los puntos en papel cuadrículado y dibuja una curva suave a través de ellos.
- Prepara una tabla de pares ordenados para $s = 2t^2 - 3t + 1$. Traza los puntos en papel cuadrículado y dibuja una curva suave a través de ellos.
- ¿En qué se parecen las gráficas de las tres ecuaciones?
- ¿En qué se diferencian las tres gráficas? En particular, ¿dónde están sus puntos más bajos y sus ejes de simetría?

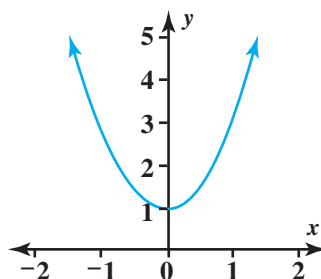
- 27.** Cada una de estas cuatro gráficas representan $y = x^2 + 1$ ó $y = 2x^2 + 1$.



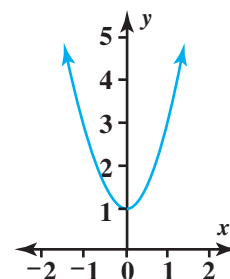
Gráfica A



Gráfica B



Gráfica C



Gráfica D

- Relaciona cada gráfica con su ecuación. Explica tu razonamiento.
- ¿Cómo es que las gráficas que se ven diferentes tienen la misma ecuación?

En tus propias palabras

Explica cómo los valores de a y c afectan la gráfica de la ecuación cuadrática $y = ax^2 + c$.

28. Reto Considera la ecuación $y = x^2 - 4x$.

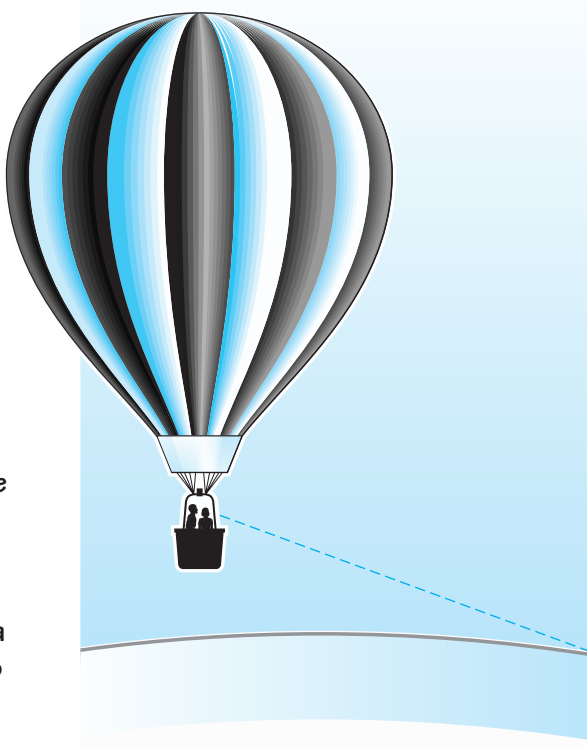
- Identifica los valores de a , b y c en esta ecuación cuadrática.
- ¿En dónde cruza el eje y la gráfica de $y = x^2 - 4x$? ¿Cómo se relaciona este punto con el valor de c en la ecuación?
- Grafica $y = x^2 - 4x$, haciendo una tabla y trazando los puntos. Asegúrate de que tu gráfica muestre ambas mitades de la parábola.
- Provee las coordenadas de los puntos donde la gráfica cruza el eje x .
- Usa la propiedad distributiva para escribir $x^2 - 4x$ como el producto de dos factores.
- ¿Cómo se relacionan los puntos que cruzan el eje x de la gráfica con esta forma factorizada?

29. Los pasajeros en un globo aerostático pueden ver distancias cada vez más grandes al elevarse el globo. La tabla muestra la relación entre la altura del globo y la distancia que pueden ver los pasajeros: la distancia al horizonte.*

Estudia la tabla y observa lo que le ocurre a d a medida que aumenta h en cantidades iguales.

Datos de interés

En mayo de 1931, Auguste Piccard de Suiza se convirtió en la primera persona en llegar a la estratosfera, al viajar en globo aerostático a casi 52,000 pies. En octubre de 1934, Jeannette Piccard se convirtió en la primera mujer en alcanzar la estratosfera cuando ella y su esposo (Jean, hermano gemelo de Auguste) viajaron en globo a casi 58,000 pies.

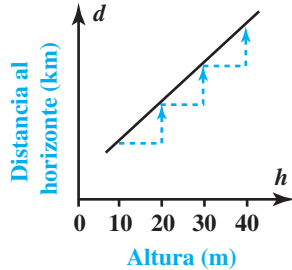


Altura (metros), h	Distancia al horizonte (kilómetros), d
0	5
10	11
20	16
30	20
40	23
50	25

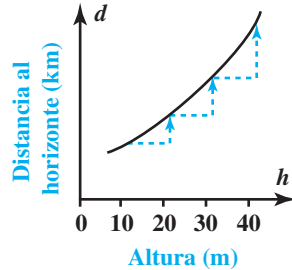
*Adaptado con autorización de *Language of Functions y Graphs*, pág. 110. Shell Centre for Mathematical Education, Universidad de Nottingham. Publicado en diciembre 1985 por Joint Matriculation Board, Manchester.

- a. A continuación, hay tres gráficas. ¿Cuál se adapta más apropiadamente a los datos de la tabla? Explica.

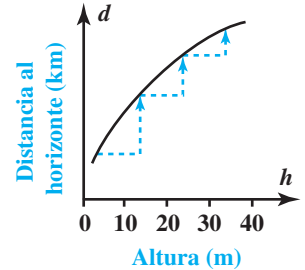
En esta gráfica, d aumenta en cantidades constantes a medida que aumenta h .



En esta gráfica, d aumenta en cantidades mayores a medida que aumenta h .



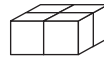
En esta gráfica, d aumenta en cantidades menores a medida que aumenta h .



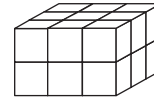
- b. Verifica tu respuesta de la Parte a y haz una gráfica de las relaciones entre d y h .
- c. Observa d en relación a h . ¿Crees que estos datos podrían representar una relación cuadrática? Explica.

30. Considera este patrón de figuras con cubos.

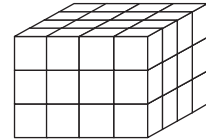
Etapa 1



Etapa 2



Etapa 3



Etapa 4



El 20 de marzo de 1999, Bertrand Piccard (el nieto de Auguste Piccard) y Brian Jones se convirtieron en los primeros pilotos de un globo aerostático, en girar en órbita alrededor de la Tierra sin detenerse. Viajaron 42,810 kilómetros y condujeron 19 días con 1 hora y 49 minutos.

- a. Copia y completa la tabla para el patrón.

Etapa, n	1	2	3	4
Cubos, C				

- b. ¿Cuántos cubos se necesitarán para hacer la Etapa 5?
- c. Escribe una ecuación para el número de cubos en la Etapa n . Explica cómo calculaste la respuesta.



31. A veces, se confunde la relación *cuadrática* $y = x^2$ con la relación *exponencial* $y = 2^x$.

a. Copia y completa la tabla de los valores para $y = x^2$ y $y = 2^x$.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$y = x^2$	16	9	4	1	0	1					
$y = 2^x$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2					

b. ¿Para cuáles de los valores mostrados de x son iguales x^2 y 2^x ?

c. ¿Para cuáles de los valores mostrados de x es x^2 mayor que 2^x ?

d. ¿Para cuáles de los valores mostrados de x es 2^x mayor que x^2 ?

e. Compara la forma en que cambian los valores de $y = x^2$ a medida que x aumenta en 1 con la forma en que cambian los valores de $y = 2^x$ a medida que x aumenta en 1.

f. ¿En qué se diferencian x^2 y 2^x para los valores de x mayores que 6?

g. Usa la tabla de valores para graficar $y = x^2$ y $y = 2^x$ en el mismo grupo de ejes.

Repaso mixto

Evalúa cada expresión para los valores dados.

32. $h(g - h^i)$ si $h = 2$, $g = -1$ y $i = 5$

33. $a^d + ab - b^c$ si $a = -3$, $b = -2$, $c = 3$ y $d = 2$

34. $(m - km)^k$ si $m = -4$ y $k = 3$

Calcula el valor de b en cada ecuación.

35. $3^b = 27$

36. $b^b = 256$

37. $(-b)^b = -27$

Calcula la pendiente de la recta que pasa a través de los puntos dados.

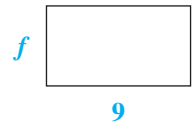
38. $(-2, 3)$ y $(5, 8)$

39. $(0, -6)$ y $(-8, 0)$

40. $(-3.5, 1.5)$ y $(0.5, 2)$

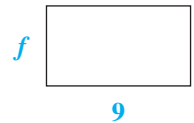
41. $(-7, -2)$ y $(-9, -2)$

42. Considera este rectángulo.



- a. Escribe una expresión para el área del rectángulo.
- b. Usa tu expresión para escribir una ecuación que establezca que el área del rectángulo es de 108 unidades cuadradas.
- c. Resuelve tu ecuación para calcular el valor de f .

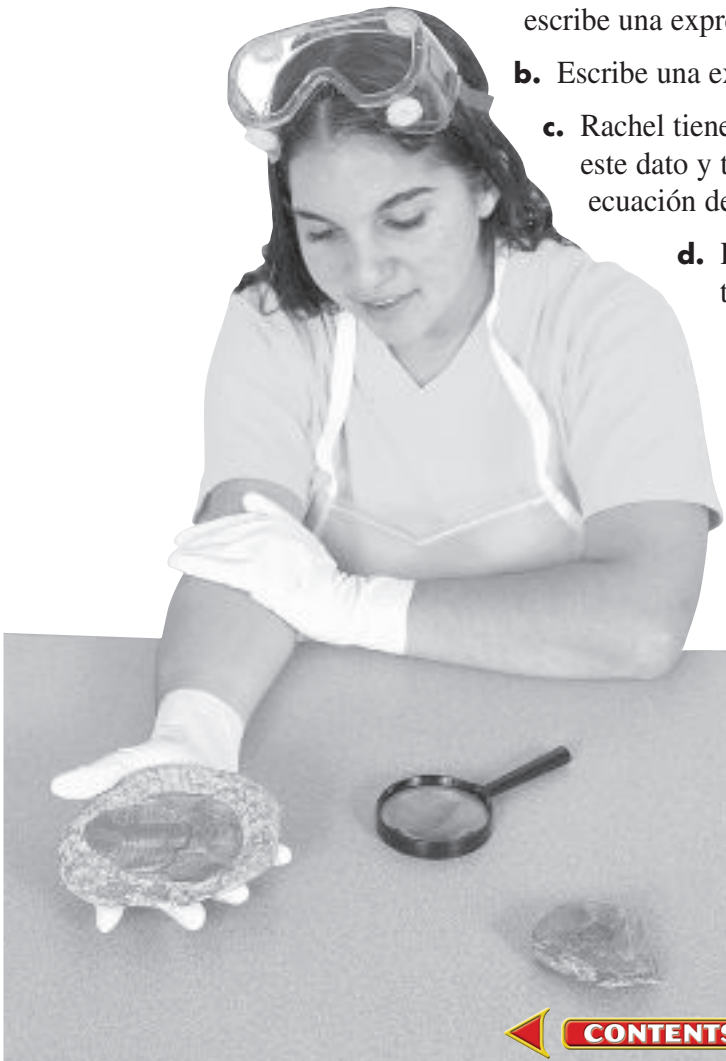
43. Considera este rectángulo.



- a. Escribe una expresión para el perímetro del rectángulo.
- b. Usa tu expresión para escribir una ecuación que establezca que el perímetro del rectángulo es de 39 unidades.
- c. Resuelve tu ecuación para calcular el valor de f .

44. Rachel dividió su colección de fósiles en tres categorías: plantas, insectos y otros animales. Ella tenía ocho plantas fósiles más que animales fósiles. La cantidad de insectos fósiles que tenía es tres menos que cuatro veces la de plantas fósiles.

- a. Si a representa la cantidad de animales fósiles que tenía Rachel, escribe una expresión del número de plantas fósiles que tenía.
- b. Escribe una expresión del número de insectos fósiles que tenía.
- c. Rachel tiene 41 insectos fósiles más que animales fósiles. Usa este dato y tu expresión de la Parte b, para escribir una ecuación de esta situación.
- d. Resuelve tu ecuación para calcular cuántos fósiles tiene Rachel en cada categoría.



En esta lección, vas a estudiar un nuevo tipo de relación: relaciones en las que el producto de dos cantidades siempre es el mismo. Como en las cuadráticas, descubrirás que las relaciones de este tipo

- tienen gráficas con formas distintivas
- tienen tablas que muestran un patrón identificable
- tienen ecuaciones de forma específica

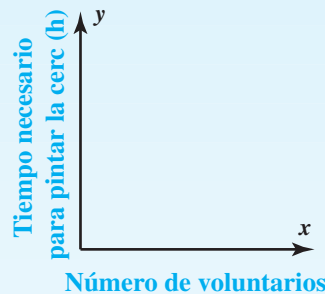
Explora

Un grupo voluntario de alumnos se ofreció a pintar la cerca de un parque del vecindario.



Supón que todos los voluntarios trabajan al mismo ritmo. Si hicieras una gráfica con el número de voluntarios en el eje horizontal y el tiempo necesario para pintar la cerca en el eje vertical, ¿cómo sería la gráfica?

Comenta esta pregunta en tu grupo y después haz la gráfica. Piensa sólo en la forma general de la gráfica; no te preocupes de los números exactos.



Ahora, comenta estas preguntas con tu clase:

- ¿Aumentará o disminuirá la gráfica de izquierda a derecha? ¿Por qué?
- ¿Será la gráfica de una recta? Explica tu respuesta.
- ¿Intersecará las intersecciones axiales la gráfica? Explica tu respuesta.
- Si un alumno empieza el trabajo a las 9:00 A.M. y no descansa hasta terminarlo a las 5:00 P.M., tendría lógica poner el punto (1, 8) en la gráfica. El punto (2, 4) también estaría en la gráfica. Explica qué representa este punto y cómo sabes que estaría en la gráfica.
- ¿Qué representaría el punto (4, 2)?
- ¿Cuál de los siguientes puntos sería razonable encontrar en la gráfica que incluye (1, 8), (2, 4) y (4, 2)?

(5, 1.6)

(8, 1)

(80, 0.1)

Explica tus respuestas.

Si un voluntario puede completar el trabajo en 8 horas, dos pueden terminarlo en 4 horas, 3 en $2\frac{2}{3}$ horas, y así sucesivamente. En cada caso, el número de *personas-horas* (la cantidad de personas multiplicada por las horas) es 8. De manera que, una forma de expresar la relación entre el tiempo necesario para terminar el trabajo T y el número de voluntarios V es

$$TV = 8$$

En esta lección, vas a explorar muchas otras situaciones en que el producto de dos variables es constante.

Investigación 1 Cuando xy es constante

MATERIALES

papel cuadriculado

A medida que trabajes en estos problemas, observa las semejanzas en las ecuaciones, gráficas y tablas.

Serie de problemas A

La Srta. Anwar está pensando arrendar una casa que tiene un patio rectangular grande. Ella quiere saber si habrá espacio para los juegos de sus niños. El dueño le dijo que “el patio tenía un área de 2,000 pies cuadrados”. La Srta. Anwar pensó en lo que él le dijo y trató de imaginarse cuáles serían las dimensiones reales del patio.

1. Sea x la longitud, en pies, de uno de los lados del patio y y la longitud, en pies, de un lado adyacente. Elige algunos valores viables para x y y , y completa una tabla como la siguiente.

x	50	25	100					
y	40							
Área, xy	2,000							

2. Escribe una ecuación que muestre cómo se relacionan x y y .
3. Haz una gráfica de la relación entre x y y . Para empezar, traza los puntos en tu tabla. Añade más puntos, si lo necesitas, hasta que veas claramente la forma de la gráfica. Dibuja una curva suave a través de los puntos.
4. Reflexiona en el cambio que y sufre a medida que cambia x en esta situación.
 - a. Copia y completa la tabla para mostrar lo que sucede.

x	20	30	40	50	60	70	80	90	100
y	100	66.7							
Descenso en y	—	33.3							

- b. A medida que x disminuye en una cantidad fija, digamos 10, ¿disminuirá y en la misma cantidad fija o en una cantidad cada vez mayor o cada vez menor?
- c. Si se duplica x , ¿qué le pasa a y ? Si se triplica x , ¿qué le pasa a y ? ¿Qué le pasa a y si x se multiplica por N ?
- d. A medida que x se vuelve más pequeña (cerca de 0), ¿qué le pasará a y ? A medida que crece x , ¿qué le pasará a y ?

Serie de problemas B

El dueño de la casa que está arrendando la Srta. Anwar decidió contratar a alguien para que limpiara el patio sobrecrecido. Contactó a Rob, un alumno de secundaria, y después de mucho regatear acordó pagarle \$240 por el trabajo de limpieza del patio.

Si Rob trabaja arduamente, terminará rápidamente el trabajo y su tasa de pago por hora será alta. Si trabaja a un paso más lento, el trabajo tomará más tiempo y su tasa de pago por hora será más baja.

1. Completa la tabla.

Horas trabajadas	$\frac{1}{2}$		2		10	20	
Tasa de pago por hora		\$240		\$48			\$8

- Escribe una ecuación para esta situación, usando h para las horas empleadas en terminar el trabajo y d para los dólares ganados por hora.
- Haz una gráfica suave trazando primero suficientes pares de números (h, d) para observar un patrón.

En todas las situaciones que has visto hasta el momento, las variables parecen lógicas sólo para valores positivos. Las dimensiones del patio de la Srta. Anwar, la tasa del salario por horas de Rob y la cantidad de horas que Rob trabaja deben ser mayores que 0.

En la siguiente serie de problemas, verás otra relación en que el producto de las variables es constante. Esta vez, vas a considerar tanto los valores positivos como los negativos de las variables.

Serie de problemas C

Considera la relación $xy = 3$, donde x y y pueden ser positivos o negativos.

- Si empiezas con valores de x , con frecuencia es más fácil calcular los valores de y si primero vuelves a plantear la ecuación aislando y en un lado. A veces, esto se llama *despejar y en términos de x* . Despeja y en términos de x en la ecuación $xy = 3$.
- Calcula los valores de y para cinco valores negativos y cinco valores positivos de x entre -10 y 10 . Registra los valores (x, y) en una tabla. ¡Usa tu imaginación! Prueba algunos valores que no sean enteros, incluye valores entre 0 y 1.
- ¿Qué es y cuando $x = 0$? ¿Qué sucede si usas tu calculadora para despejar y cuando $x = 0$?

4. Haz una gráfica suave de esta relación trazando primero los pares en tu tabla. Si es necesario, añade más puntos para que te tengas una buena idea de la forma de la gráfica.

Piensa en lo que sucede a la gráfica cerca del eje y . ¿Puede cruzar el eje y la gráfica?
5. ¿En qué se parecen esta gráfica y esta ecuación a la gráfica y ecuación del trabajo del patio de la Serie de problemas B? ¿En qué se diferencian?

Comparte & resume

1. ¿En qué se parecen las ecuaciones de la Serie de problemas A, B y C? ¿En qué se diferencian?
2. ¿En qué se parecen las gráficas? ¿En qué se diferencian?

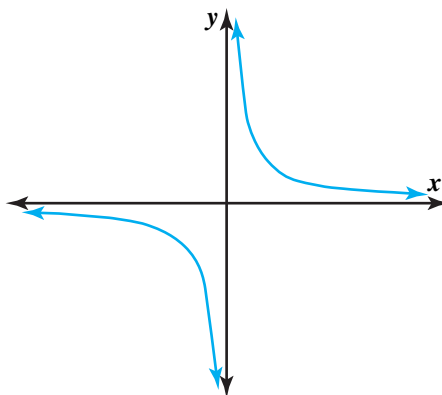
Investigación 2 Proporción inversa

Has trabajado con relaciones en que al multiplicar dos variables obtienes un producto constante. Es decir,

$$xy = a$$

donde x y y son las variables y a es una constante que no es cero.

La gráfica de tal relación es una curva como la siguiente:



VOCABULARIO

hipérbola

A este tipo de curva se le llama **hipérbola**.

Piensa & comenta

Piensa en las tres relaciones que trabajaste en la Investigación 1:

$$xy = 2,000 \quad dh = 240 \quad xy = 3$$

En cada caso, si duplicas el valor de una variable, ¿qué le pasa a la otra variable?

¿Qué sucede si triplicas el valor de una variable? ¿Qué pasa si divides en dos el valor de una variable?

VOCABULARIO

**inversamente
proporcional
variación inversa**

En el Capítulo 1, aprendiste que dos variables son *directamente proporcionales* si los valores de sus variables tienen una *tasa* constante. Cuando dos variables tienen una constante que es un *producto* distinto de cero, se dice que son **inversamente proporcionales**. Una relación en que dos variables son inversamente proporcionales se llama **variación inversa**.

Explorarás la interrelación entre proporciones inversas y *recíprocos*.

MATERIALES

papel cuadriculado



Recuerda

El número por el que se multiplica otro número, para obtener 1, es su *recíproco*. Por ejemplo, el recíproco de 7 es $\frac{1}{7}$, ya que $7 \cdot \frac{1}{7} = 1$.

Serie de problemas D

- Encuentra el recíproco de cada número. Expresa tus respuestas como enteros o fracciones, no como números mixtos o decimales.
 - 2
 - 5
 - 1
 - $\frac{1}{3}$
 - $\frac{3}{4}$
 - $-\frac{9}{7}$
 - $\frac{7}{3}$
 - 10
- Observa tus respuestas del Problema 1.
 - Encuentra el recíproco de cada respuesta.
 - ¿Qué observas?
- Si x no es 0, ¿cuál es el recíproco de x ?
- ¿Cuál es el recíproco de $\frac{1}{x}$?
- ¿Cuál es el recíproco del recíproco de x ?



Recuerda

x^{-1} es otra forma de escribir $\frac{1}{x}$. Es posible que tu calculadora tenga una tecla para recíprocos con la marca $\boxed{1/x}$ o $\boxed{x^{-1}}$.

6. Encuentra el recíproco de cada número. Expresa tu respuesta como decimal.
 - a. 8
 - b. 100
 - c. 0.2
 - d. -0.25
 - e. 12
 - f. 7.5
 - g. -1
 - h. 0.0004
7. Observa tus respuestas del Problema 6.
 - a. Encuentra el recíproco de cada respuesta.
 - b. ¿Qué observas?
8. Considera la relación $y = \frac{1}{x}$.
 - a. ¿Qué le sucede a y si duplicas x ? ¿Si triplicas x ? ¿Si cuádruplicas x ? ¿Si divides x por la mitad?
 - b. ¿Es y inversamente proporcional a x ? Es decir, ¿es $y = \frac{1}{x}$ una variación inversa? Explica.
 - c. Haz una gráfica de $y = \frac{1}{x}$.

Serie de problemas E

Considera la relación $y = \frac{5}{x}$.

1. ¿Qué le sucede a y si duplicas x ? ¿Si triplicas x ? ¿Si cuádruplicas x ? ¿Si divides x en dos?
2. ¿Es y inversamente proporcional a x ? Explica.
3. ¿Cuál es el valor de $y = \frac{5}{x}$ cuando $x = 0$? ¿Qué sucede si calculas $\frac{5}{0}$ con tu calculadora?
4. Copia y completa la tabla. Escribe las entradas como enteros o fracciones.

x	-5	-4	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	5
$y = \frac{1}{x}$															
$y = \frac{5}{x}$															

5. Haz una gráfica de $y = \frac{5}{x}$ en los mismos ejes que usaste para la gráfica de $y = \frac{1}{x}$.

VOCABULARIO

relación recíproca

Las relaciones $y = \frac{1}{x}$ y $y = \frac{5}{x}$ son variaciones inversas. Observa que cuando el valor de una variable se multiplica por un número, el valor de la otra variable se multiplica por el *recíproco* de ese número. Por ejemplo, por $y = \frac{5}{x}$, cuando $x = 1$, $y = 5$. Pero cuando multiplicas x por 3, y se convierte en $\frac{5}{3}$ ó $5 \cdot \frac{1}{3}$. Por esta razón, las variaciones inversas a veces se llaman **relaciones recíprocas**.

Serie de problemas F

Indica si cada relación representa una relación recíproca. Si la respuesta es no, indica qué tipo de relación *representa* la ecuación.

1. $st = 6$

2. $s = 2t^2$

3. $s = 6t$

4. $y = \frac{x}{7}$

5. $y = \frac{7}{x}$

6. $x = \frac{2}{y}$

Completa las Partes a y b para los Problemas 7 al 9.

a. Indica qué tipo de relación podría existir entre las variables: lineal, cuadrática o recíproca.

b. Escribe una ecuación que relacione las cantidades.

7.

x	0.5	1	2	3	4	5	10
y	-2.5	-5	-10	-15	-20	-25	-50

8.

p	0.5	1	2	3	4	5	10
q	1.25	2	5	10	17	26	101

9.

t	0.5	1	2	3	4	5	10
r	3	1.5	0.75	0.5	0.375	0.3	0.15

Comparte & resume

- Si se te da una tabla de valores con dos variables, ¿cómo puedes determinar si la relación entre las variables podría ser una variación inversa?
- Si se te da una ecuación con dos variables, ¿cómo puedes determinar si la relación entre las variables es una variación inversa?

Investigación

3

Relaciones con productos constantes



Datos

d e **interés**

Este tipo de relación se usa en el diseño de las lentes que recogen y dirigen la luz en los telescopios.

Has estudiado relaciones en que el producto de dos cantidades es una constante positiva. Todas estas relaciones se pueden escribir con ecuaciones en la forma $xy = a$ o, equivalentemente, $y = \frac{a}{x}$, donde a es un número positivo. A un grupo de ecuaciones que tienen en general la misma forma, algunas veces se le llama *familia* de ecuaciones.

Vas a explorar otras familias de ecuaciones que describen relaciones en que el producto es una constante. Observarás ecuaciones de las siguientes formas:

- $xy = a$ o, equivalentemente $y = \frac{a}{x}$, donde a es una constante negativa
- $(x + b)y = 1$ ó, equivalentemente $y = \frac{1}{x + b}$, donde b es una constante
- $x(y - c) = 1$ ó, equivalentemente $y = \frac{1}{x} + c$, donde c es una constante

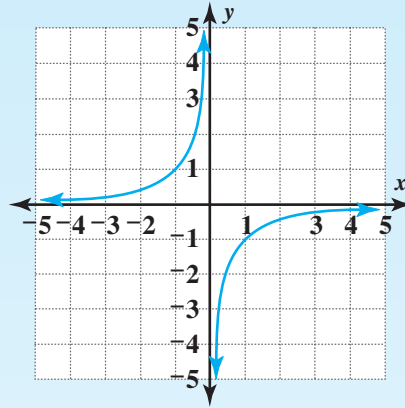
Observatorio Allegheny, Pittsburgh, Pennsylvania



Piensa & comenta

Ya has estudiado la relación $y = \frac{1}{x}$. Ahora piensa en $y = -\frac{1}{x}$. Aquí hay una tabla y una gráfica para esta relación.

x	-10	-0.2	0.5	1	2	5	10
y	0.1	5	-2	-1	-0.5	-0.2	-0.1



Piensa en las partes de la gráfica que no se muestran.

¿Cuál es el valor de y si $x = 100$? ¿Si $x = 1,000$?

¿Qué sucede a medida que los valores de x aumentan a más de 1,000?
¿Será y alguna vez igual a 0?

¿Qué les sucede a los valores de y a medida que los valores positivos de x se acercan al 0? ¿Qué ocurre cuando $x = 0$? ¿Qué significa esto para la gráfica de $y = -\frac{1}{x}$?

¿Cuál es el valor de y si $x = -100$? ¿Si $x = -1,000$?

¿Qué sucede a medida que los valores de x disminuyen más allá de -1,000? ¿Será y alguna vez igual a 0?

¿Qué les sucede a los valores de y a medida que los valores negativos de x se acercan al 0? ¿Qué ocurre cuando $x = 0$?



Recuerda

El *valor absoluto* de un número es su distancia a partir de 0 en la recta numérica. El valor absoluto de -4 es 4.

MATERIALES

calculadora
graficadora

Como probablemente acabas de ver, para $y = \frac{1}{x}$ y $y = -\frac{1}{x}$ a medida que el valor absoluto de x se vuelve cada vez más grande, y se aproxima a 0 sin alcanzarlo nunca.

x	1	10	100	1,000	10,000	100,000	...
$\frac{1}{x}$	1	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001	...

x	-1	-10	-100	-1,000	-10,000	-100,000	...
$\frac{1}{x}$	-1	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	-0.00001	...

De la misma manera, a medida que el valor absoluto de y se vuelve cada vez más grande, x se aproxima a 0 sin alcanzarlo nunca. Ésta es una característica de todas las variaciones inversas: siempre hay algún valor (no siempre 0) al que se aproxima x pero no lo alcanza a medida que aumenta el valor absoluto de y ; y hay algún valor al que se aproxima y , pero no lo alcanza, a medida que aumenta el valor absoluto de x .

Serie de problemas

En grupo, explora una de las familias de las ecuaciones descritas a continuación.

Familia A

Ecuaciones de la forma $y = \frac{a}{x}$, como $y = \frac{3}{x}$ y $y = -\frac{7}{x}$

Familia B

Ecuaciones de la forma $y = \frac{1}{x+b}$, como $y = \frac{1}{x+2}$ y $y = \frac{1}{x-1}$

Familia C

Ecuaciones de la forma $y = \frac{1}{x} + c$, como $y = \frac{1}{x} + 5$ y $y = \frac{1}{x} - 2$

Tu meta es entender por qué se parecen las gráficas de las relaciones en la familia que elegiste y cómo cambian las gráficas a medida que cambia la constante: a , b o c . Tu grupo debe preparar un informe que describa sus hallazgos incluyendo lo siguiente:

- una serie de bosquejos, dibujados y rotulados con cuidado, para mostrar cómo cambia la gráfica, a medida que cambia la constante
 - una explicación escrita de tus hallazgos, que incluya las respuestas a los Problemas 1 al 6
1. ¿Cómo cambia la gráfica a medida que cambia la constante?
 2. ¿Cómo afecta a la gráfica el cambio en la constante, de positiva a negativa?
 3. ¿A qué valores se aproxima x a medida que aumenta el valor absoluto de y ? ¿Cambia éste a medida que cambia la constante?



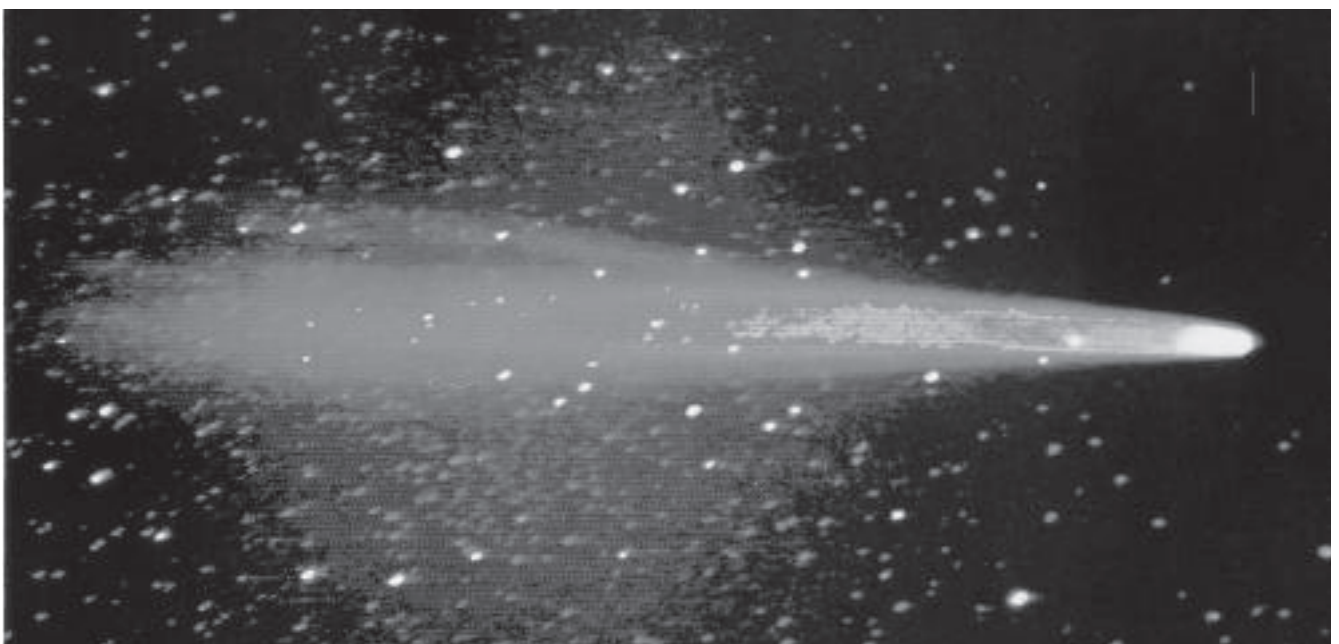
Las ecuaciones con productos constantes se usan para describir la trayectoria que siguen algunos cometas a través del espacio.

4. ¿A qué valores se aproxima y a medida que aumenta el valor absoluto de x ? ¿Cambia éste a medida que cambia la constante?
5. ¿Para qué valor o valores de x no hay valor de y ? ¿Cambia esto a medida que cambia la constante?
6. ¿En qué se diferencian las gráficas de la gráfica de $y = \frac{1}{x}$?

Comparte & resume

1. Compara cómo el valor de a afecta las gráficas de las ecuaciones de la forma $y = ax^2$ con la manera en que afecta las gráficas de las ecuaciones de la forma $y = \frac{a}{x}$.
2. Compara cómo el valor de b afecta las gráficas de las ecuaciones de la forma $y = (x + b)^2$ con la manera en que afecta las gráficas de las ecuaciones de la forma $y = \frac{1}{x + b}$.
3. Compara cómo el valor de c afecta las gráficas de las ecuaciones de la forma $y = x^2 + c$ con la manera en que afecta las gráficas de las ecuaciones de la forma $y = \frac{1}{x} + c$.

Cometa Halle



Ejercicios por tu cuenta

Practica & aplica

1. Miguel le dio a su hermanita Jenna \$3 para comprar calcomanías. El precio por calcomanía varía en relación con el tipo de calcomanía. Jenna quiere comprar todas las calcomanías del mismo tipo.
 - a. Haz una tabla de los valores posibles del precio por calcomanía p y del número de calcomanías n . Se muestran un par de valores como ejemplo.

Precio por calcomanía, p	\$0.25						
Número comprado, n	12						

- b. Grafica la relación entre p y n , con p en el eje horizontal. Para empezar, traza los puntos en tu tabla y añade más puntos, si los necesitas, hasta que veas claramente la forma de la gráfica. Une los puntos con una curva suave.
 - c. ¿Qué le sucede al valor de n cuando se duplica el valor de p ? ¿Cuándo se triplica p ? ¿Cuándo se cuadruplica p ?
 - d. ¿Qué le sucede al valor de n cuando se divide el valor de p en dos? ¿Cuándo se divide el valor de p en cuatro?
 - e. Escribe una ecuación de la relación entre p y n .
2. Manuel piensa servir una pizza gigante en su fiesta de cumpleaños. La cantidad de pizza que se le servirá a cada invitado depende del número de los mismos.
 - a. Copia y completa la tabla, muestra la fracción de pizza f que se le servirá a cada persona, para diferente número de personas, n . Supón que cada persona obtiene la misma cantidad de pizza y que se sirve toda la pizza.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f												



- b.** Haz una gráfica de la relación entre n y f , trazando los puntos en tu tabla y uniéndolos con una curva.
- c.** Escribe una ecuación de la relación entre n y f .
- 3.** Considera la ecuación $xy = 10$, donde x y y pueden ser positivos o negativos.
- a.** Despeja y en términos de x .
- b.** Haz una tabla de valores para esta ecuación. Escoge valores de x entre -10 y 10 . Considera valores de x positivos, valores de x negativos y valores de x entre -1 y 1 .
- c.** ¿Cuál es el valor de y cuando x es 0 ? Explica tu respuesta.
- d.** Grafica esta relación; para empezar traza los puntos de tu tabla. Añade más puntos, si lo necesitas, hasta que veas claramente la forma de la gráfica y después conecta los puntos con una curva suave. Piensa cuidadosamente en lo que le sucede a la gráfica cerca del eje y .

En los Ejercicios 4 al 9, decide si la relación es una variación inversa. Si no lo es, di qué tipo de relación es.

4. $st = \frac{1}{4}$

5. $s = \frac{6t}{8}$

6. $s = \frac{t^2}{4}$

7. $y = 0.25x$

8. $y = \frac{0.25}{x}$

9. $x = \frac{0.25}{y}$

Para los Ejercicios 10 al 12 haz las Partes a, b y c.

- a.** Indica si las variables podrían ser inversamente proporcionales. Explica cómo lo sabes.
- b.** Traza los puntos en un par de ejes. Coloca la variable en la hilera superior del eje horizontal.
- c.** Escribe una ecuación para la relación entre las variables.

10.

m	0.5	1	2	3	4	5	10
n	60	30	15	10	7.5	6	3

11.

x	0.5	1	2	3	4	5	10
y	0.25	0.5	1	1.5	2	2.5	5

12.

t	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	2
r	0.5	0.25	0.1667	0.125	0.1	0.0833	0.0625



13. Economía Antoine quiere gastar \$4 en kiwis en el mercado. El precio por kiwi varía de un puesto a otro.

a. ¿Es la relación entre el precio por kiwi en dólares, p , y el número de kiwis que puede comprar Antoine, n , una variación inversa? Explica.

b. Escribe una ecuación para la relación entre p y n .

14. Los mangos son muy caros en esta época del año en el mercado. Cuestan \$4 cada uno, pero Carmen no puede resistirlos.

a. ¿Es la relación entre el precio total que Carmen pagó por los mangos, p , y el número de mangos que compró, n , una variación inversa? Explica.

b. Escribe una ecuación para relación entre p y n .

15. Kiyoshi gastó \$8 en el mercado. Compró sólo mandarinas que cuestan \$0.40 cada una; y nectarinas a \$0.80 cada una.

a. ¿Es la relación entre el número de mandarinas, m , y el número de nectarinas, n , una variación inversa? Explica.

b. Escribe una ecuación para la relación entre m y n .

16. Considera ecuaciones de la forma $y = \frac{a}{x}$.

a. En un par de ejes, grafica las siguientes tres ecuaciones. Usa valores de x y y de -10 a 10 .

i. $y = \frac{-1}{x}$

ii. $y = \frac{-5}{x}$

iii. $y = \frac{-10}{x}$

b. Describe el cambio que sufren las gráficas de $y = \frac{a}{x}$ a medida que disminuye a .

17. Considera ecuaciones de la forma $y = \frac{a}{x+b}$.

a. En un par de ejes, grafica las siguientes tres ecuaciones. Usa valores de x y y de -10 a 10 .

i. $y = \frac{1}{x+1}$

ii. $y = \frac{1}{x+3}$

iii. $y = \frac{1}{x+5}$

b. Describe el cambio que sufren las gráficas de $y = \frac{a}{x+b}$ a medida que aumenta b .

18. Considera ecuaciones de la forma $y = \frac{a}{x} + c$.

a. En un par de ejes, grafica las siguientes tres ecuaciones. Usa valores de x y y de -10 a 10 .

i. $y = \frac{1}{x} + 2$

ii. $y = \frac{1}{x} + 4$

iii. $y = \frac{1}{x} + 6$

b. Describe el cambio que sufren las gráficas a medida que aumenta c .

- 19. Ciencia física** El tiempo necesario para llegar a algún sitio depende de la rapidez a la que se viaje. Supón que un campamento que quieres visitar queda a 500 millas de distancia. A continuación, hay algunos medios de transporte que podrías usar. Algunos no son tan prácticos como otros, pero usa tu imaginación.

Medio de transporte	Rapidez promedio (mph)
Tren subterráneo	30
Auto	50
Helicóptero	85
Avión liviano	
Cohete	1,100
A caballo	
Bicicleta	

- Estima los promedios de rapidez que faltan en la tabla. (No te preocupes de la precisión de tus cálculos.)
- Copia y completa la tabla para mostrar cuánto tiempo se necesitaría para viajar 500 millas, usando la rapidez estimada para cada tipo de transporte.

Rapidez (mph)	30	50	85	1,100			
Tiempo del recorrido (h)							

- Escribe una ecuación que establezca la relación entre la rapidez S y el tiempo T necesario para recorrer 500 millas.
- Usa los valores de tu tabla para trazar una curva suave de la relación entre rapidez y tiempo. Coloca la rapidez en el eje horizontal.
- ¿Qué ocurre con los valores del tiempo a medida que aumentan los valores de la rapidez?
- ¿Podría alguna vez alcanzar 0 el tiempo del recorrido de un viaje de 500 millas?
- La velocidad de la luz es de 186,000 millas por segundo. Determina cuánto duraría el viaje si pudieras viajar en un rayo de luz. ¿Se muestra este valor en tu gráfica?
- Escribe una ecuación de la rapidez necesaria para recorrer 500 millas en T horas.

20. Compara la relación inversa $y = \frac{3}{x}$ con la relación lineal $y = 3x$.

- Grafica y rotula ambas ecuaciones en un par de ejes.
- Considera las partes de las gráficas del primer cuadrante. ¿Qué le sucede a cada gráfica a medida que aumenta x ?
- Considera las partes de las gráficas del primer cuadrante. A medida que x se acerca a 0, ¿qué le sucede a cada gráfica?
- ¿Qué sucede cuando $x = 0$?

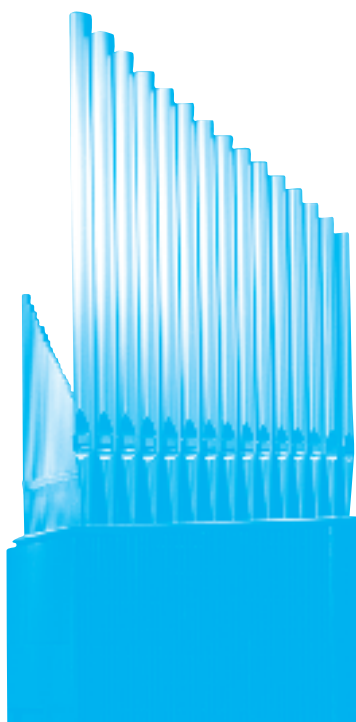
21. Un enorme órgano de iglesia tiene tubos con longitudes que van desde unos cuantos centímetros hasta 4 metros. La tabla enumera las longitudes de los tubos E bemol de todas las octavas, junto con las frecuencias de los sonidos que produce. Las frecuencias más altas corresponden a los tonos más altos.

Longitud de los tubos (metros), l	4.0	2.0	1.0	0.5	0.25	0.125	0.0625
Frecuencia (ciclos por segundo), f	39	78	156	312	622	1,244	2,488

- Traza los puntos usando una escala apropiada para los ejes. Coloca las longitudes de los tubos en el eje horizontal. Une los puntos con una curva suave.
- Usa tu gráfica para predecir la longitud de tubo que produciría una nota A con una frecuencia de 440 ciclos por segundo.
- Usa tu gráfica para predecir la frecuencia que produce un tubo de 3 metros de largo.
- ¿Qué forma tiene la gráfica? ¿Qué te sugiere esta forma sobre la relación entre la frecuencia y la longitud del tubo?
- Encuentra una ecuación que se adapte bastante bien a los datos. ¿Por qué crees que los datos no podrían encajar exactamente?

22. Encontraste que para la ecuación $y = \frac{1}{x}$, no hay un valor y correspondiente a un valor x de 0. Decimos que la ecuación $y = \frac{1}{x}$ es *indefinida* para $x = 0$. En las Partes a, b, c, d y e, enumera algún valor de x para el cual la ecuación es indefinida.

- $y = \frac{1}{x-1}$
- $y = \frac{2}{1-2x}$
- $y = \frac{1}{x+2}$
- $y = \frac{2}{x}$
- $y = \frac{x}{2}$
- $y = \frac{4}{3x-12}$



En tus propias palabras

Describe qué es una variación inversa. ¿Cómo puedes reconocer una variación inversa en una tabla, una gráfica y en una descripción escrita?

- 23.** Considera la ecuación $y = \frac{1}{x^2}$.
- Haz una tabla de valores y una gráfica para los valores de x entre -10 y 10 . Traza suficientes puntos para dibujar una curva suave.
 - ¿En qué se parece esta gráfica a la gráfica de $y = \frac{1}{x}$?
 - ¿En qué se diferencia esta gráfica de la gráfica de $y = \frac{1}{x}$?
- 24.** Una compañía de entretenimiento ha gastado \$200,000 en desarrollar un nuevo programa de juegos. Aunque los costos de manufactura dependen de la cantidad de productos producidos, la compañía estima que el manufacturar y enviar los productos le costará \$4 por unidad que elabore y venda.
- Supón que la compañía produce sólo 20 unidades del programa. ¿Cuál es el costo promedio de elaborar cada una de las 20 unidades?
 - ¿Cuál es el costo *total* promedio (desarrollo, más manufactura, más flete) de cada una de las 20 unidades?
 - Escribe una expresión para el costo total promedio de n unidades.
 - Completa la tabla para esta situación.

Unidades	20	200	2,000	20,000	200,000	2,000,000
Promedio del costo total (\$)	10,004					

- Supón que la compañía produce más y más unidades. El costo promedio se acercará cada vez más a una cantidad en particular. ¿Cuál es esta cantidad?
- ¿Cuántas unidades debe producir la compañía para que el costo total promedio sea menor que la cantidad que respondiste en la Parte e más \$1? ¿Cuántas unidades se necesitan para que el costo sea menor que 1¢ más?

Repaso mixto

Reordena cada ecuación lineal en la forma pendiente-intersección, $y = mx + b$.

- $\frac{2}{3}x - \frac{5}{8} = 2y$
- $3y - 4x - 1 = 8x - 2y$
- $4(x + y) - 6(5 - x) = 6$
- $\frac{7(y + 5)}{x + 2} = 10$

Reduce cada expresión tanto como te sea posible.

29. $a + 4(a - 2)$

30. $2b - (8 + 2b)$

31. $90 - (5c - 1)$

32. $4d(2 + e) - 2(3 + 2d)$

33. $-7(1 - f) + 2(7f + 2) - 9(f + 2)$

Escribe la ecuación de una recta paralela a la recta dada.

34. $y = 2x - 4$

35. $2n = 4m$

36. $2(y - 3) = 7x + 1$

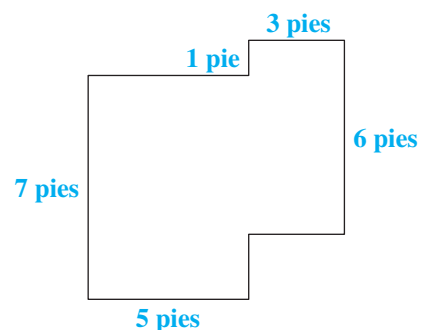
37. $x = -2$

38. Economía Taylor tiene \$60. Él está interesado en comprar algunos calcetines deportivos que cuestan \$3 el par y algunas gorras de béisbol, en oferta, a \$5 cada una.

- a.** Escribe una expresión que muestre cuánto podrían costar s pares de calcetines y c gorras.
- b.** Taylor gastó todos sus \$60 en calcetines y gorras. Usa tu respuesta de la Parte a para expresarla como ecuación.
- c.** Grafica tu ecuación. Coloca el número de pares de calcetines en el eje vertical y la cantidad de gorras en el eje horizontal.
- d.** Usa tu gráfica para calcular todos los pares de números que representen la cantidad de gorras y pares de calcetines que Taylor podría haber comprado. Ojo: él sólo puede comprar números enteros de cada artículo.

39. El abuelo de Candace le dio cuatro canicas: una azul, una amarilla y dos verdes. De cumpleaños, ella quiere darle la mitad de las canicas a su amiga Luisa. Candace pone todas las canicas en una bolsa de cuero y deja que Luisa elija dos sin ver. ¿Cuál es la probabilidad de que Luisa elija las dos canicas verdes?

40. Bryan dibujó este bosquejo de la casa de muñecas que quiere construir. ¿Cuál es el área del suelo de la casa de muñecas?



2.4

Conjeturas

En las primeras tres lecciones de este capítulo, aprendiste sobre las relaciones cuadráticas y recíprocas. En esta lección, practicarás más con estos tipos de relaciones a medida que descubres un proceso importante para las matemáticas: hacer y probar *conjeturas*.

VOCABULARIO

conjetura

Una **conjetura** es una suposición razonada o generalización que no has probado como correcta (todavía). Algunas veces tienes pruebas que te llevan a hacer una conjetura. Otras veces, sólo “presientes” lo que pasará y haces una conjetura basada en muy pocas pruebas.



Recuerda

Los enteros consecutivos se siguen uno al otro, como 1 y 2 ó 5 y 6.

Explora

Desiree y Yutaka buscaban patrones en los productos de pares de enteros consecutivos.

$$5 \cdot 6 = 30$$

$$7 \cdot 8 = 56$$

$$10 \cdot 11 = 110$$

Yutaka notó un patrón al relacionar los productos del cuadrado del primer número.

Copia y completa la tabla.

Primer entero	5	7	10	90	0	-4	-1
Segundo entero	6	8	11			-3	
Producto	30	56	110				
Primer entero al cuadrado							

Compara la tercera y cuarta hileras de tu tabla. Trata de hacer una conjetura sobre la relación entre el producto de dos enteros consecutivos y el cuadrado del primer entero. Pon a prueba tu conjetura con unos cuantos ejemplos más de tu invención.

¿Puedes ver alguna manera de demostrar que tu conjetura es verdadera?

Investigación 1 Haz conjeturas

En esta investigación, tratarás de hacer conjeturas sobre otras situaciones.

Serie de problemas A

Sabes que en la tabla de una relación lineal, a medida que x aumenta en 1, las diferencias en los valores y consecutivos son constantes. Por ejemplo, observa esta tabla para $y = 10 - 2x$.

x	1	2	3	4	5	6	7
y	8	6	4	2	0	-2	-4
Diferencias	-2	-2	-2	-2	-2	-2	

Ahora observa las diferencias en los valores de y para la relación cuadrática $y = -x^2 + 2x - 1$.

x	1	2	3	4	5	6	7
y	0	-1	-4	-9	-16	-25	-36
Diferencias	-1	-3	-5	-7	-9	-11	

Las diferencias en los valores de y no son constantes, ¿pero qué pasa si observas las *diferencias de las diferencias*?

1. Calcula las diferencias faltantes en esta tabla para $y = -x^2 + 2x - 1$.

x	1	2	3	4	5	6	7
y	0	-1	-4	-9	-16	-25	-36
Diferencias de los valores de y	-1	-3	-5	-7	-9	-11	
Diferencias de las diferencias	-2	?	?	?	?		

Para evitar confusión, las diferencias de los valores y se llaman *primeras diferencias* y las diferencias de las diferencias se llaman *segundas diferencias*.

2. ¿Qué observas en las segundas diferencias de la ecuación $y = -x^2 + 2x - 1$?
3. Trabaja con un compañero y explora las primeras y las segundas diferencias de dos ecuaciones cuadráticas más. Trata de hacer conjeturas basadas en tus hallazgos.

Una vez que ya hayas hecho una conjetura, el siguiente paso es tratar de encontrar un argumento convincente para explicar por qué tu conjetura es verdadera, o para encontrar pruebas de que no es verdadera.

Para demostrar que una conjetura es verdadera, no es suficiente mostrar que *por lo general* funciona. Ni siquiera es suficiente decir que la conjetura ha funcionado en todos los ejemplos probados hasta el momento, a menos que hayas probado *todos* los casos posibles. *Tú* podrías estar convencido, pero debes ser capaz de convencer también a los demás.

Y aunque ya estés convencido de que una conjetura es verdadera, encontrar un argumento para probarlo te puede ayudar a comprender *por qué* es verdadera.

Serie de problemas B

Considera las diferencia de cuadrados de números enteros consecutivos.

Números consecutivos	Diferencia de cuadrados
1, 2	$2^2 - 1^2 = 3$
2, 3	$3^2 - 2^2 = 5$
3, 4	$4^2 - 3^2 = 7$
$\vdots$	$\vdots$
$n, n + 1$	$(n + 1)^2 - n^2 = D$

Sea n cualquier número entero, $n + 1$ es el siguiente número entero. Una ecuación para la diferencia de cuadrados D de estos números es

$$D = (n + 1)^2 - n^2$$

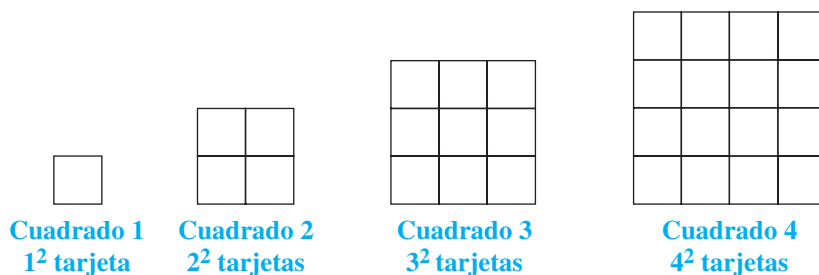
1. Copia y completa la tabla para mostrar el valor de D para los valores de n dados.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
D	3	5	7					

2. Usa lo que sabes sobre las diferencias constantes para determinar qué tipo de relación es $D = (n + 1)^2 - n^2$.
3. Usa la tabla y tu respuesta al Problema 2 para hacer una conjetura sobre qué podría ser una ecuación más simple para relacionar D con n .

Haz hecho una conjetura sobre una ecuación más simple para D . Ahora puedes encontrar un argumento convincente para explicar por qué tu ecuación debe ser correcta. Una forma de hacerlo es usar un poco de geometría.

Puedes representar el cuadrado de un número entero como un cuadrado hecho de tarjetas. El siguiente patrón de tarjetas representa los cuadrados de números enteros consecutivos.



La diferencia entre los cuadrados de dos enteros consecutivos es el número de tarjetas que debes añadir para pasar de un cuadrado al siguiente. (Asegúrate de que entiendes por qué es verdadera.)

4. Piensa cómo podrías añadir las tarjetas para pasar de un cuadrado al siguiente en el siguiente patrón.
 - a. Copia el patrón y colorea las tarjetas que se añaden en cada etapa.
 - b. ¿Cuántas tarjetas se añaden para pasar del Cuadrado 1 al 2? ¿Del 2 al 3? ¿Del 3 al 4?
 - c. ¿Cuántas tarjetas se añaden para pasar del Cuadrado n al Cuadrado $n + 1$? Explica cómo calculaste la respuesta.
 - d. Si hiciste correctamente la Parte c, tu respuesta debería probar tu conjetura del Problema 3. ¿Puedes explicar cómo?

Comparte & resume

1. Explica de qué manera el encontrar la primera y la segunda diferencia te puede ayudar a determinar si una relación es lineal o cuadrática.
2. ¿Cómo hiciste tu conjetura en el Problema 3 en la Serie de problemas B?
3. ¿Cómo usaste la geometría para probar tu conjetura?

Investigación 2 Trabajo de detective



Recuerda

Un número primo es un número con sólo dos números enteros como factores: 1 y el número mismo.

Hacer y probar conjeturas se parece un poco a ser detective. Podrías empezar con una corazonada y después investigar más, buscando pruebas para sustentar o refutar tus corazonadas. Los buenos detectives no buscan sólo pruebas que sustenten sus conjeturas, sino que también tratan de conservar una mente abierta y buscan pruebas de cualquier forma, aunque éstas muestren que sus corazonadas eran erróneas. Hasta un *contraejemplo*, un ejemplo que no sustenta una conjetura, probará que una conjetura es equivocada.

Serie de problemas C

Los números primos son importantes en la criptografía, para estudiar los códigos. Muchos matemáticos han intentado encontrar una regla que genere números primos.

Considera la expresión $n^2 - n + 41$ como una posibilidad para tal regla.

1. Evalúa $n^2 - n + 41$ si $n = 1, 2, 3$ y 4 . ¿Es cada resultado un número primo? (Ayuda: Si un número *no* es primo, debe tener un factor primo que sea igual o menor que su raíz cuadrada. Por ejemplo, cualquier número no primo menor que 100 debe tener 2, 3, 5 ó 7 como un factor.)
2. Trata con algunos otros valores de n . ¿Qué encuentras? Compara tus resultados con los de otros alumnos.
3. ¿Crees que la expresión generará *siempre* un número primo? Explica tu respuesta.
4. Prueba la expresión para $n = 41$. (No uses tu calculadora.) ¿Es primo el resultado?
5. Explica cómo podrías determinar la respuesta para el Problema 4 sólo observar la expresión $41^2 - 41 + 41$.

La marina estadounidense reclutó a soldados de la tribu navajo para desarrollar un código militar que los japoneses no pudieron descifrar.



He aquí cómo Dante y Kai pensaron acerca de la suma de números impares.



Serie de problemas D

1. Convéncete de que el argumento de Dante y Kai es razonable. Después trata de responder la pregunta de Dante: ¿Cómo podrías escribir el argumento para convencer a alguien más de que siempre debe ser verdadero?

2. Entonces Kai escribió sus argumentos de esta manera:

- Si un número es par, se puede escribir como $2k$, donde k es un número entero.
- Si un número es impar, es 1 más que un número par, entonces se puede escribir como $2k + 1$.
- Entonces, $\text{impar} + \text{impar} = (2k + 1) + (2k + 1) = 4k + 2 = 2(2k + 1)$, que es un número par.

Dante no está de acuerdo. Él dice: “Lo que has demostrado es que 2 veces un número impar es igual a un número par y eso ya es evidente porque ése es el significado de *par*”.

- a. Comenta esto con un compañero. ¿Quién tiene razón? Explica.
 - b. Si crees que Dante tiene razón, corrige el argumento de Kai.
3. Haz una conjetura sobre la suma de un número par y uno impar. Después, escribe un argumento convincente de por qué tu conjetura debe ser verdadera.

Serie de problemas E

Ben y Lucita estaban observando una tabla de datos de las variables x , y y z . Ben encontró que y era inversamente proporcional a x . Lucita encontró que z también era inversamente proporcional a x .

1. Haz una conjetura sobre la relación entre y y z .

Ahora, tratarás de probar tu conjetura.

2. Escribe ecuaciones para las relaciones que conoces.
- a. la relación entre x y y
 - b. la relación entre x y z
3. Si es necesario, despeja x en cada una de las ecuaciones que escribiste en el Problema 2.
4. Ahora tienes dos expresiones, cada una igual a x . ¿Qué denota esto sobre la relación entre las dos expresiones? Escribe una ecuación que demuestre esto.
5. Luego, despeja y en términos de z . ¿Qué tipo de relación existe entre y y z ? ¿Fue correcta tu conjetura?

Comparte & resume

1. ¿Qué le dirías a una amiga que te dice que puede probar que una fórmula general es correcta y después te demuestra que su fórmula sólo funciona en algunos ejemplos exclusivos?
2. ¿Por qué es importante comentar las pruebas de tus conjeturas con gente que podría no estar de acuerdo contigo acerca de las conjeturas?

Ejercicios por tu cuenta

Practica & aplica

En los Ejercicios 1 al 4, hiciste conjeturas sobre si la relación entre x y y es lineal, cuadrática o ninguna de las dos. Explica cómo lo decidiste.

1.

x	1	2	3	4	5	6	7
y	-1	4	15	32	55	84	119

2.

x	1	2	3	4	5	6	7
y	4	16	64	256	1,024	4,096	16,384

3.

x	1	2	3	4	5	6	7
y	6	8	10	12	14	16	18

4.

x	1	2	3	4	5	6	7
y	4	12	24	40	60	84	112

5. Escribe una ecuación para la relación del Ejercicio 3.
6. En la Serie de problemas B, observaste en $D = (n + 1)^2 - n^2$ la diferencia entre los cuadrados de números enteros consecutivos. Considera esta ecuación:

$$d = (m + 2)^2 - m^2$$

En este caso, d es la diferencia entre el cuadrado de un número entero y el cuadrado de ese número entero más 2.

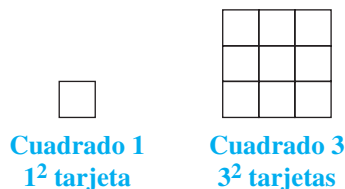
Números	Diferencia de cuadrados
1, 3	$3^2 - 1^2 = 8$
2, 4	$4^2 - 2^2 = 12$
3, 5	$5^2 - 3^2 = 16$
$\vdots$	$\vdots$
$m, m + 2$	$(m + 2)^2 - m^2 = d$

- a. Copia y completa la tabla para mostrar el valor de d para los valores consecutivos de m .

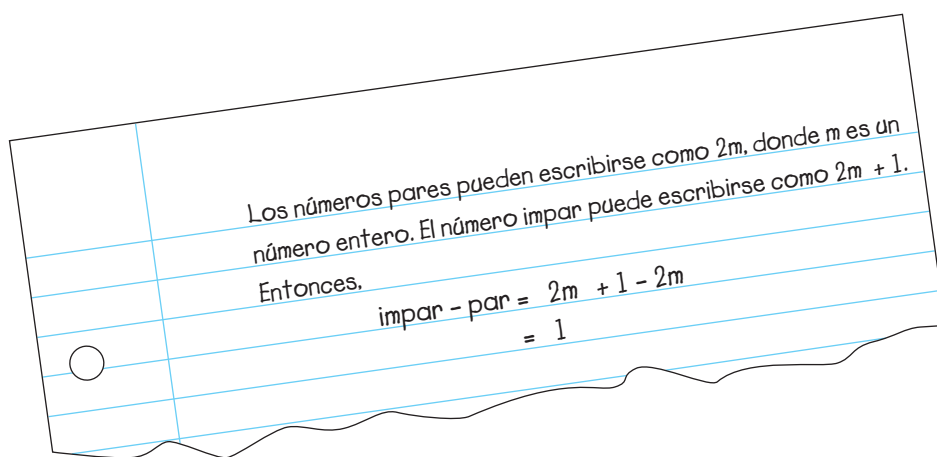
m	1	2	3	4	5	6
d	8	12	16			

- b. Usa lo que sabes sobre las diferencias constantes para determinar qué tipo de relación es $d = (m + 2)^2 - m^2$.

- c. Haz una conjetura acerca de cuál sería una ecuación más sencilla para
d. Verifica que tu respuesta funcione para $m = 1$, $m = 2$ y $m = 3$.
- d. Puedes usar la geometría para argumentar que tu conjetura es verdadera. A continuación hay tarjetas de 1^2 y 3^2 . Piensa en la manera de añadir tarjetas para pasar de un cuadrado al siguiente. Copia el diagrama y colorea las tarjetas que añadas.



- e. Dibuja tarjetas cuadradas para representar 2^2 y 4^2 , colorea las tarjetas que añadas para pasar de un cuadrado al otro. Haz lo mismo para 3^2 y 5^2 .
- f. ¿Cuántas tarjetas añades para pasar del cuadrado n^2 al cuadrado para $(n + 2)^2$? Explica cómo calculaste la respuesta.
- g. ¿Prueba tu respuesta de la Parte f tu conjetura para la Parte c? Explica tu respuesta.
7. Héctor supuso que cuando restas un número entero par de un número impar, el resultado es impar. Él trató de probar su conjetura.



Héctor dice—Según mi prueba, un número impar menos un número par siempre es 1. Si esto no es cierto, ¿qué hice mal?

- a. ¿Qué hizo mal Héctor?
- b. Da una prueba correcta de la conjetura de Héctor.
8. Haz y prueba una conjetura sobre la diferencia entre dos números pares.
9. Haz y prueba una conjetura sobre la diferencia entre dos números impares.

- 10.** No puedes probar una conjetura general con sólo verificar ejemplos específicos, sólo con un ejemplo falso, un contraejemplo, la descartará. Muestra que la conjetura $(m + n)^2 = m^2 + n^2$ es falsa, provee valores de m y n en los que no funcione.
- 11.** Para cada enunciado, encuentra una prueba o un contraejemplo.
- a. El recíproco de x por el recíproco de y es el recíproco de xy .
 - b. El recíproco de x más el recíproco de y es el recíproco de $x + y$.
- 12.** A continuación, se muestra una tabla de valores para la ecuación cúbica $y = x^3$. Observa que ni las primeras ni segundas diferencias son constantes.

x	1	2	3	4	5	6	7
y	1	8	27	64	125	216	343
Primeras diferencias		7	19	37	61	91	127
Segundas diferencias			12	18	24	30	36

- a. Calcula las *terceras diferencias*. ¿Qué observas?
 - b. Explora las primeras, segundas y terceras diferencias de dos ecuaciones cúbicas más. Trata de hacer una conjetura basada en tus hallazgos.
 - c. Haz una conjetura sobre las diferencias de una *ecuación cuártica* que pueda escribirse en la forma $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Prueba tu conjetura en $y = x^4$.
- 13.** Recuerda que la primera diferencia constante de una ecuación lineal es el valor de m cuando la ecuación se escribe en la forma $y = mx + b$. En este ejercicio, buscarás una relación entre una ecuación cuadrática y la segunda diferencia constante.

- a. Calcula la segunda diferencia constante en esta tabla de valores para $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x$.

x	1	2	3	4	5	6	7
y	2.5	6	10.5	16	22.5	30	38.5

- b. Calcula la segunda diferencia constante en esta tabla de valores para $y = -x^2 + 2x - 1$.

x	1	2	3	4	5	6	7
y	0	-1	-4	-9	-16	-25	-36

En tus propias palabras

Explica la diferencia entre *hacer una conjetura* y *probarle algo a alguien*.

- c. Calcula la segunda diferencia constante en esta tabla de valores para $y = 3x^2 - 9$.

x	1	2	3	4	5	6	7
y	-6	3	18	39	66	99	138

- d. En las Partes a, b y c, busca la relación entre la segunda diferencia constante y el coeficiente de x^2 en la ecuación cuadrática. Trata de hacer una conjetura sobre esta relación.
- e. Prueba tu conjetura en por lo menos dos ecuaciones cuadráticas más.

14. **Sentido numérico** La *conjetura de Goldbach* establece que cualquier entero par mayor que 2 se puede expresar como la suma de dos números primos. He aquí algunos ejemplos.

$$4 = 2 + 2 \quad 6 = 3 + 3 \quad 8 = 3 + 5$$

- a. Prueba la conjetura con 10, 12 y 100.
- b. ¿Parece verdadera la conjetura?
- c. ¿Qué necesitas demostrar para probar tu conjetura?

En los Ejercicios 15 al 17, decide si la conjetura es verdadera o falsa. Trata de dar una prueba convincente de las conjeturas que sean verdaderas. Para las conjeturas falsas, da un contraejemplo.

15. El valor de $n^2 - n$ siempre es un número par.
16. El cuadrado de todo número par es un múltiplo de 4.
17. La diferencia entre cualesquiera dos números cuadrados es siempre un número par.

Indica si los puntos en cada grupo están sobre una recta.

18. (0, 0); (9, 0); (0, 2)
19. (0.3, -2); (-1, 4.5); (10.1, -51)
20. (-3, -14.8); (0, -7.3); (1.4, -3.8)
21. Gerald recogió los siguientes datos de un experimento. Los datos son casi lineales. Grafica los datos y encuentra una ecuación para la recta de mejor ajuste.

Día	1	2	3	4	5	6	7
Altura (mm)	0.38	0.92	1.33	1.82	2.35	2.88	3.36

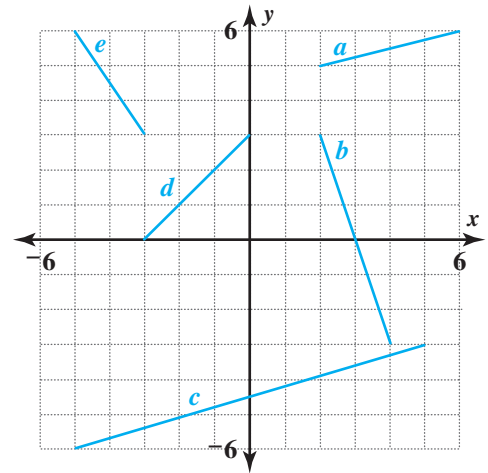


La conjetura de Goldbach se formuló en 1742. Aunque parece simple, nadie ha sido capaz de probar que es verdadera.

Repaso mixto

22. Calcula la pendiente de cada segmento.

- a. Segmento a
- b. Segmento b
- c. Segmento c
- d. Segmento d
- e. Segmento e



23. Economía Running Rapids cobra \$8.00 por el alquiler de una balsa y \$3.50 por cada paseo río abajo en la balsa.

- a. Escribe una ecuación que represente cuánto gastarías en un día paseando río abajo con Running Rapids.
- b. Tienes \$30 para gastar en Running Rapids. Con tu expresión de la Parte a, determina hasta cuántas veces podrías pasear en la balsa que alquilaste.

24. Para hacer el simulacro de sacar una de tres canicas de una bolsa, Neeraj lanzó un dado varias veces. Las canicas eran de colores diferentes: azul, blanca y morada. Obtener 1 ó 2 representa sacar la canica azul. Obtener 3 ó 4 representa sacar la canica blanca. Obtener 5 ó 6 representa sacar la canica morada.

¿Representa este simulacro sacar una canica y devolverla antes de sacar la siguiente? ¿O representa no regresar la canica a la bolsa, antes de sacar la siguiente? ¿Cómo lo sabes?

25. El servicio postal estadounidense cobra un franqueo extra por los sobres que exceden ciertos tamaños específicos: $11\frac{1}{2}$ pulgadas de largo y $6\frac{1}{8}$ pulgadas de alto. También cobra un cargo extra si la longitud dividida entre la altura es menor que 1.3 ó mayor que 2.5. Indica si los sobres de las dimensiones dadas requieren un franqueo extra.

- | | |
|-------------------------|-----------------------|
| a. 8 pulg por 4 pulg | b. 7 pulg por 6 pulg |
| c. 11.4 pulg por 5 pulg | d. 7 pulg por 7 pulg |
| e. 10 pulg por 3 pulg | f. 12 pulg por 7 pulg |



VOCABULARIO

conjetura
ecuación
 cuadrática
ecuación cúbica
expresión
 cuadrática
hipérbola
inversamente
 proporcional
parábola
relación recíproca
variación inversa
vértice

Resumen del capítulo

Al igual que las relaciones lineales, las *relaciones cuadráticas* tienen ciertas características. Una relación cuadrática puede representarse con una ecuación de la forma $y = ax^2 + bx + c$ donde a , b y c son constantes y a no es 0. La gráfica de una ecuación cuadrática tiene una forma particular, llamada *parábola*.

Las *relaciones inversas* o *recíprocas* también tienen una forma particular llamada *hipérbola*. Has visto relaciones inversas con ecuaciones de la forma $y = \frac{a}{x}$, $y = \frac{1}{x+b}$ y $y = \frac{1}{x} + c$. Además, viste cómo son las ecuaciones y gráficas de las relaciones *cúbicas*.

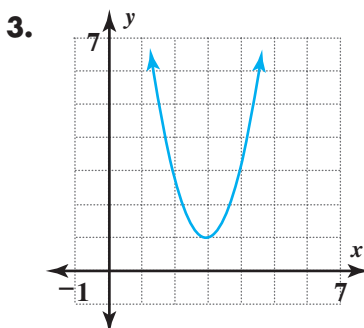
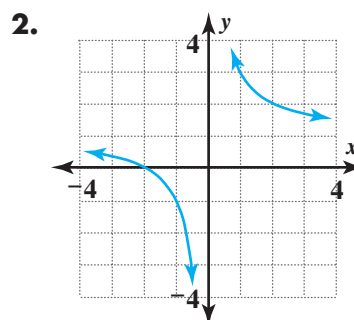
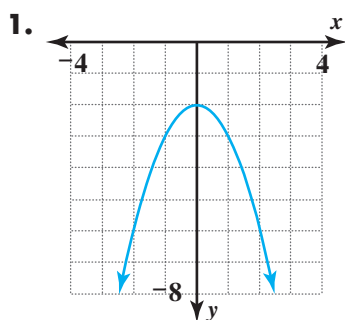
También hiciste varias *conjeturas* en este capítulo. *Probar* una conjetura no sólo te permite convencer a otros de que es verdadera, sino que también te puede ayudar a entender *por qué* es verdadera.

Estrategias y aplicaciones

Las preguntas en esta sección te ayudarán a repasar y a aplicar las ideas y estrategias importantes desarrolladas en este capítulo.

Identifica relaciones cuadráticas de gráficas, ecuaciones y tablas

En las Preguntas 1 al 9, determina si la relación entre x y y podría ser cuadrática y explica cómo lo sabes.



4.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-10	-7	-4	-1	2	5	8

5.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-4	-5	-4	-1	4	11	20

6.

x	0	1	2	3	4	5	6
y	1	2	4	8	16	32	64

7. $y = 2x^3 + x^2$

8. $y = x(x + 2)$

9. $y = 2^x + 3$

Comprende las conexiones entre las ecuaciones y las gráficas cuadráticas

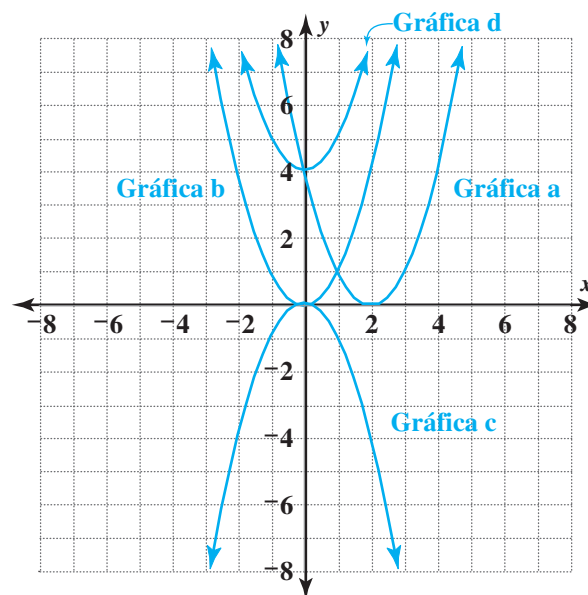
Relaciona cada ecuación con una de las siguientes gráficas.

10. $y = x^2$

11. $y = -x^2$

12. $y = x^2 - 4x + 4$

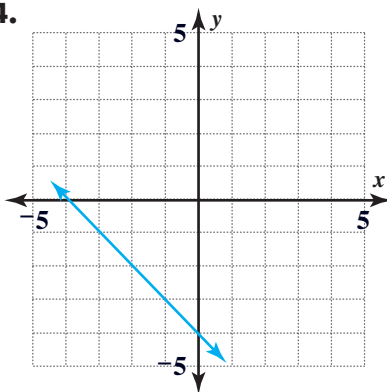
13. $y = x^2 + 4$



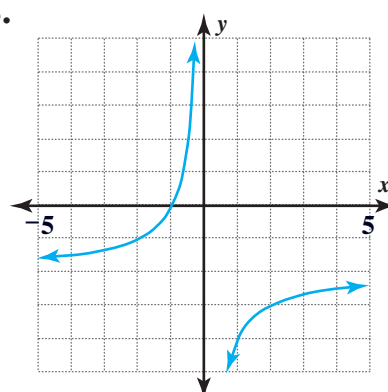
Reconoce relaciones inversas de descripciones escritas, gráficas, tablas y ecuaciones

En las Preguntas 14 al 22, determina si la relación entre x y y podría ser una relación inversa y explica cómo lo sabes.

14.



15.



16. Carl vende diarios hechos a mano con páginas en blanco. Notó que por cada \$5 que le aumenta al precio x , sus ventas semanales y bajan en 20 libros.

17. Sandra tiene 60 tarjetas cuadradas. Ella trata de encontrar el número máximo posible de arreglos rectangulares de las 60 tarjetas y registra las dimensiones como longitud x y ancho y .

18.

x	1	2	4	5	6	9	10
y	60	30	15	12	10	$6\frac{2}{3}$	6

19.

x	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5
y	840	420	280	210	168	140	120

20. $2xy = 7$

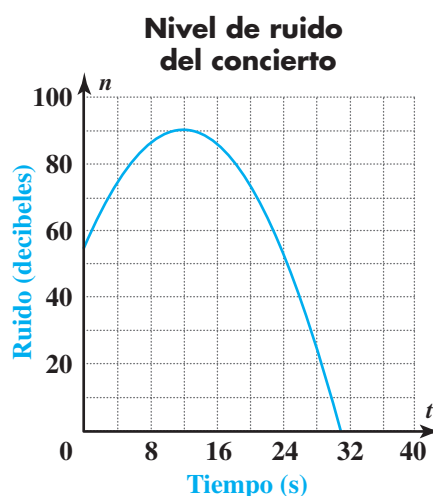
21. $y = \frac{x}{4}$

22. $x + 2 = \frac{1}{y}$

Resuelve problemas concretas que presenten relaciones cuadráticas e inversas

- 23.** Una estación de radio transmite un concierto en vivo. Cuando los radioescuchas aplauden al final de cada canción, los niveles del sonido aumentan y llegan al máximo y des pués bajan de una manera que puede aproximarse a una ecuación cuadrática.

La gráfica muestra la relación entre el nivel de ruido n (en decibeles) y el tiempo t (en segundos) después de que termina una canción en particular.



- a. ¿En qué momento, después de que terminara la canción, era mayor el ruido? ¿Cuál fue el nivel del ruido?

- b. Si un altoparlante trata de producir un sonido que es muy fuerte, éste *distorsiona* el sonido y produce estática. El personal baja el sonido que emite cuando el nivel sonoro sube más allá de 70 decibeles y lo mantiene bajo hasta que los decibeles vuelven a bajar a menos de 70. ¿Cuánto tiempo estuvo bajo el sonido después de la canción? ¿Cómo calculaste la respuesta?
 - c. Los niveles sonoros de 50 decibeles o menos se consideran sonidos ambientales normales. ¿Cuánto tiempo después de que empezaron los aplausos, fue aminorando el sonido hasta alcanzar el nivel de sonido ambiental normal?
- 24.** Jeanine organizó un evento para darles a sus compañeros de clase la oportunidad de que leyeran sus poemas frente a un público. Ella hizo arreglos para que la biblioteca estuviera abierta 2 horas la noche del día de la lectura y quería determinar cuánto tiempo tendría cada poeta. Ella se dio cuenta de que dependería de la cantidad de poetas que invitara.
- a. Escribe una ecuación que exprese la cantidad de tiempo t en minutos disponible para cada poeta si hay n poetas. Supón que un poeta empieza inmediatamente después de que otro poeta termina.
 - b. Si Jeanine invita a 8 poetas a leer, ¿cuánto tiempo tendrá cada uno?
 - c. Supón que Jeanine quiere darle 10 minutos a cada poeta. ¿Cuántos puede invitar?

Haz conjeturas

- 25.** Considera estos grupos de tres números enteros consecutivos.

3, 4, 5 5, 6, 7 0, 1, 2 9, 10, 11

Compara los productos del primero y último número de cada grupo con el cuadrado del número de en medio.

- a. Haz una conjetura sobre lo que observas.
- b. Supón que el número del medio es x . ¿Cuáles son los otros dos números? Vuelve a plantear tu conjetura como un enunciado matemático usando x .
- c. Encuentra un contraejemplo o una prueba para tu conjetura. (Ayuda: Observa geoméricamente este problema.)

Demuestra tus destrezas

En los Ejercicios 26 al 31, haz un bosquejo preliminar que muestre la forma general y la ubicación de la gráfica de la ecuación.

26. $y = 3x^2$

27. $y = \frac{3}{x}$

28. $y = x^3$

29. $y = -x^2 + 3$

30. $y = -\frac{2}{x} - 1$

31. $y = (x + 1)^2$

